



Серёгин С. В., Лейзерович Г. С.
S. V. Seregin, G. S. Leizerovitch

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ КРУГОВОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НАЧАЛЬНЫМИ НЕПРАВИЛЬНОСТЯМИ
И МАЛОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ**

**FREE VIBRATION OF INFINITE LENGTH CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL
WITH INITIAL IMPERFECTIONS AND A SMALL ADDED MASS**

Серёгин Сергей Валерьевич – аспирант, ассистент кафедры «Строительство и архитектура» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27. E-mail: Seregin-komsHome@yandex.ru

Mr. Sergei V. Seregin – postgraduate student, Assistant Lecturer, Department of Civil Engineering and Architecture, Komsomolsk-on-Amur State Technical University. Email: Seregin-komsHome@yandex.ru

Лейзерович Григорий Самуилович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Механика и анализ конструкций и процессов» Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27. E-mail: ktpm@knastu.ru

Mr. Grigoriy S. Leizerovich – Dr.habil. of Physics and Mathematics, Head of the Department of Mechanics and Analysis of Structures and Processes, Komsomolsk-on-Amur State Technical University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). Email: ktpm@knastu.ru

Аннотация. Теоретически и численно изучается влияние начальных отклонений от идеальной круговой формы и присоединенной массы на частоты и формы свободных колебаний бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки (кольца, находящегося в условии плоской деформации). В качестве математической модели используются уравнения движения, полученные из уравнений теории пологих оболочек. Предлагается новый подход к построению конечномерной модели, согласно которому считается, что рассматриваемая динамическая асимметрия уже в линейной постановке приводит к взаимодействию изгибных колебаний с радиальными. Теоретическое решение получено методом Бубнова-Галеркина. Обнаружены новые особенности влияния начальных неправильностей и присоединенной массы на частоты и формы свободных колебаний. Установлено, что эффектом расщепления изгибного частотного спектра, вызванного начальными неправильностями, можно управлять путем соответствующего подбора величины и места крепления присоединенной массы, однако полностью устранить расстройку собственных частот не удастся. Теоретические выводы качественно и количественно подтверждены численными расчетами методом конечных элементов в MSC «Nastran».

Summary. In this paper we examine – theoretically and numerically - the effect of initial deviations from the ideal circular shape and of the added mass on the natural vibrations of an infinitely long circular cylindrical shell (a ring under flat deformation). For mathematical model we use the equations of motion derived from the equations of the theory of shallow shells. We suggest a new approach to the development of a finite-dimensional model, which assumes that the dynamical asymmetry leads to interaction of radial and flexural vibrations already in the linear statement. A theoretical solution of the problem is obtained by the Bubnov–Galerkin method. New features of the influence of initial imperfections and added mass on the frequencies and forms of free vibrations are traced. We have established that the effect of splitting the frequency spectrum of the bending caused by initial irregularities can be controlled by an appropriate selection of the magnitude and the attachment points of the added mass. However, one can not completely eliminate the detuning of natural frequencies. Our theoretical conclusions are qualitatively and quantitatively confirmed by numerical calculations using the finite element method in MSC «Nastran».

Ключевые слова: круговая цилиндрическая тонкостенная оболочка, расщепление изгибного частотного спектра, радиальные колебания, начальные неправильности, присоединенная масса.

Key words: circular cylindrical thin-walled shell, splitting of the flexural frequency spectrum, radial oscillations, initial irregularities, added mass.

УДК 539.3:534.1



Введение. Известно [1-2], что начальные неправильности, неизбежные при изготовлении реальных тонкостенных круговых цилиндрических оболочек, приводят к нежелательному расщеплению изгибного частотного спектра. Удвоение частотного спектра наблюдается и у оболочек, несущих сосредоточенную массу [3-5]. Согласно [1], считается, что соответствующим подбором величины и точки крепления массы к несовершенной оболочке, эффект расщепления частотного спектра может быть полностью устранен.

В настоящей статье на примере аналитического и численного (методом конечных элементов) решения более простой (предельной) задачи о совместном влиянии начальных неправильностей и малой присоединенной массы на изгибные колебания кольца, находящегося в условии плоской деформации, возможность устранения расщепления частотного спектра ставится под сомнение.

Математическая модель. Рассматривается кольцо единичной ширины, радиусом R , толщиной h и массой M_0 . Считается, что кольцо имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы $w_0(y)$, и к нему при $y = y_0$ присоединена малая масса M .

1) **Уравнения движения.** Анализ, как и в [1], основан на известных уравнениях движения теории пологих оболочек [6]. Устремив длину оболочки к бесконечности, получим

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial (w + w_0)}{\partial y} \right) + \frac{N_y}{R} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - M \delta(y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $w(y, t)$ – упругий прогиб; $D = Eh^3 / [12(1 - \mu^2)]$ – цилиндрическая жесткость, где E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона; ρ – массовая плотность; δ – функция Дирака; t – время.

Из первого уравнения (1) следует, что окружное погонное динамическое усилие N_y зависит только от времени

$$N_y(y, t) = N_y(t) = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \alpha(t). \quad (2)$$

2) **Условие периодичности решения.** Величины, определяющие напряженно-деформированное состояние, должны возвращаться к первоначальным значениям после обхода всего контура кольца. Для окружного перемещения $v(y, t)$ условие возврата имеет вид

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{w}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha(t) \right] dy = 0. \quad (3)$$

3) **Начальные неправильности.** Считается, что кольцо имеет начальные отклонения от идеальной круговой формы, изменяющиеся по закону:

$$w_0(y) = ha_0 \sin(\beta_0 y + \varphi_0), \quad (4)$$

где a_0 – безразмерная амплитуда; φ_0 – начальный угол; $\beta_0 = n_0/R$, где n_0 – число волн несовершенств в окружном направлении. Выражение (4) можно представить и в ином виде

$$w_0(y) = h(a_{10} \sin \beta_0 y + a_{20} \cos \beta_0 y), \quad (5)$$

где $a_{10} = a_0 \cos \varphi_0$; $a_{20} = a_0 \sin \varphi_0$.

4) **Конечномерная модель кольца.** Традиционный подход [1] к построению конечномерной модели предполагает, что начальные неправильности и (или) присоединенная масса приводят к взаимодействию сопряженных изгибных форм



$$w(y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y], \quad (6)$$

где $a_1(t)$ и $a_2(t)$ – безразмерные обобщенные координаты; $\beta = n/R$.

В работе предлагается уточнение конечномерной модели (6). Будем полагать, что начальные неправильности и (или) присоединенная масса приводят не только к связанности изгибных форм, но и к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний с высокочастотными радиальными. Тогда упругий прогиб аппроксимируется выражением

$$w(y, t) = h[a_1(t) \sin \beta y + a_2(t) \cos \beta y + a_3(t)], \quad (7)$$

где дополнительно введенная координата $a_3(t)$ отвечает радиальным колебаниям.

Далее, в теоретических исследованиях, как и в [1], рассматривается случай, когда $n = n_0$, то есть начальные неправильности находятся в «резонансе» с волнообразованием кольца.

Традиционное решение. Подстановка (5) и (6) в (2) позволяет найти функцию $\alpha(t)$, а затем и само усилие $N_y(t)$. Ортогонализация второго уравнения (1) к форме динамического прогиба (5) приводит к системе связанных модальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_n^2 a_1 + \frac{2M}{M_0} [\ddot{a}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{a}_2 \cos \beta y_0] \sin \beta y_0 + 3\omega_n^2 a_{10} (2a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0; \\ \ddot{a}_2 + \omega_n^2 a_2 + \frac{2M}{M_0} [\ddot{a}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{a}_2 \cos \beta y_0] \cos \beta y_0 + 3\omega_n^2 a_{20} (2a_2 a_{20} + a_1 a_{10}) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\omega_n^2 = Dn^4 / \rho h R^4$ – приближенное значение квадрата частоты свободных изгибных колебаний динамически симметричного кольца, справедливое при $n \geq 4$.

Системе (8) отвечают две безразмерные собственные частоты изгибных колебаний $\Omega_{n1} = \omega_{n1} / \omega_n$, $\Omega_{n2} = \omega_{n2} / \omega_n$.

Рассмотрим влияние каждого из факторов динамической асимметрии в отдельности. Пусть кольцо имеет только начальные отклонения от идеальной круговой формы ($M \equiv 0$), тогда $\Omega_{n1} = 1$, $\Omega_{n2} = \sqrt{1 + 6a_0^2}$. Видно, что меньшая из расщепленных частот равна частоте колебаний идеального кольца, а большая – увеличивается с ростом амплитуды начальных неправильностей. Расстройка собственных частот $\Delta = \Omega_{n2} - \Omega_{n1}$ может быть довольно существенной. Последнее обстоятельство противоречит известным экспериментальным данным [1, 7], которые свидетельствуют о незначительной расстройке.

Если кольцо не имеет начальной погиби ($w_0(y) \neq 0$), а при $y = y_0$ к нему присоединена сосредоточенная масса, получаем следующие собственные частоты $\Omega_{n1t} = 1 / \sqrt{1 + 2M / M_0}$, $\Omega_{n2t} = 1$, не зависящие от места ее крепления. Видно, что меньшая из расщепленных частот падает с ростом M / M_0 , а большая – равна частоте колебаний кольца без массы.

Изучим теперь совместное влияние $w_0(y)$ и малой присоединенной массы на расщепление изгибного частотного спектра. Расчеты показывают, что в этом случае частоты начинают зависеть и от места крепления массы, к несовершенному кольцу.

Рассмотрев частный случай, когда $\psi = \beta y_0 = 0$, а собственные частоты $\Omega_{n2t} = 1$, $\Omega_{n1t} = \sqrt{(1 + 6a_0^2) / (1 + 2M / M_0)}$, можно прийти к выводу, что нежелательный эффект расщепления изгибного частотного спектра можно полностью устранить путем прикрепления к несовершенному кольцу массы $M = 3a_0^2 M_0$.

Новое решение.

1) **Собственные частоты.** Подстановка (5) и (7) в (3) позволяет найти сначала функцию $\alpha(t)$, а затем и окружное усилие $N_y(t)$. Ортогонализация второго уравнения (1) к форме динамического прогиба (7) приводит к системе связанных модальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \omega_n^2 a_1 + 2\gamma \sin \beta y_0 - \frac{12}{\varepsilon^{0,5}} \omega_n^2 a_3 a_{10} + 6\omega_n^2 a_{10} (a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0; \\ \ddot{a}_2 + \omega_n^2 a_2 + 2\gamma \cos \beta y_0 - \frac{12}{\varepsilon^{0,5}} \omega_n^2 a_3 a_{20} + 6\omega_n^2 a_{20} (a_2 a_{20} + a_1 a_{10}) &= 0; \\ \ddot{a}_3 + \frac{12}{\varepsilon} \omega_n^2 a_3 + \gamma - \frac{6}{\varepsilon^{0,5}} \omega_n^2 (a_1 a_{10} + a_2 a_{20}) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma = M[\ddot{a}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{a}_2 \cos \beta y_0 + \ddot{a}_3]/M_0$; $\varepsilon = n^4(h/R)^2$ – параметр волнообразования.

Из (9) видно, что начальные неправильности и присоединенная масса приводят не только к связанности сопряженных изгибных форм, но и к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний с высокочастотными радиальными.

Частотное уравнение, соответствующее (9), определяет три собственные частоты Ω_{ni} ($i=1, 2, 3$). Первым двум Ω_{n1} , Ω_{n2} соответствуют преимущественно изгибные, а третьей Ω_{n3} – преимущественно радиальные колебания.

Сначала рассмотрим случай, когда присоединенная масса отсутствует. В новом решении (см. рис. 1) начальные неправильности уменьшают низшую из расщепленных частот Ω_{n1} , при этом ее снижение зависит и от амплитуды начальной погиби, и от параметра ε , большая частота Ω_{n2} равна 1. Расстройка частот оказывается незначительной. Для возможности сопоставления на этом же рисунке показано и традиционное решение, при котором меньшая из расщепленных частот Ω_{n1} равна 1, а большая Ω_{n2} – резко увеличивается с ростом амплитуды несовершенств [8].

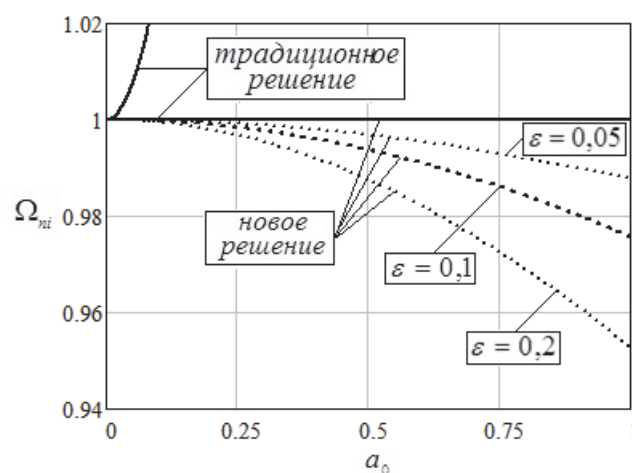


Рис. 1. Влияние амплитуды начальных несовершенств и ε на частоту колебаний

Теперь рассмотрим случай, когда к идеальному кольцу при некотором угле $\psi = \beta y_0$ присоединена масса.

В новом решении [9], учитывающем радиальные колебания, частота Ω_{n1} , в отличие от традиционного решения, зависит не только от величины присоединенной массы, но и от параметра ε . Частота Ω_{n2} и в новом, и в традиционном решениях равна 1.

Изучим теперь совместное влияние начальных неперфектностей и присоединенной массы, рассматривая, как и в [1] случай, когда масса присоединена в узлах начальных несовершенств ($\psi = \beta y_0 = 0$).

График, представленный на рис. 2, позволяет определить величину присоединенной массы, которая наиболее сильно уменьшает расстройку частотного спектра при заданном параметре волнообразования ε .

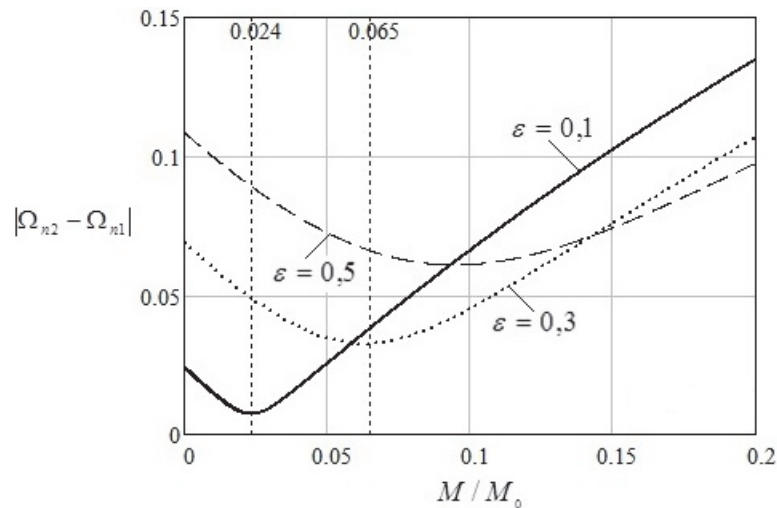


Рис. 2. Расстройка изгибного частотного спектра

Видно, что устранить нежелательный эффект расщепления в рассмотренном диапазоне изменения ε не удается.

Однако, как показывают расчеты, выполненные при $a_0 = 1$ и представленные на рис. 3, расстройкой изгибного частотного спектра несовершенного кольца можно управлять (уменьшая ее или увеличивая) путем соответствующего подбора величины и места крепления присоединенной массы. Сплошные линии на рисунке отвечают Ω_{n1} , пунктирные – Ω_{n2} . Линии без кружков относятся к случаю $\varepsilon = 0,1$ и $M = 0,024M_0$, а с кружками – $\varepsilon = 0,3$ и $M = 0,065M_0$ (см. рис. 3).

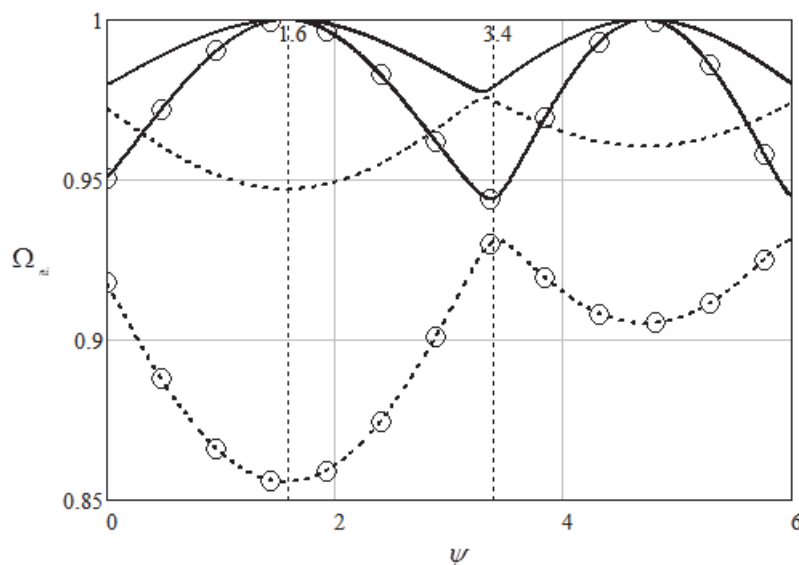


Рис. 3. Частоты собственных колебаний несовершенного кольца с массой

Видно, что частоты Ω_{n1} и Ω_{n2} зависят от места крепления массы ψ к несовершенному кольцу. В случае ее крепления в местах наибольших отклонений от круговой формы расстройка возрастает, причем в местах выпуклостей сильнее, чем в местах впадин. Наименьшая расстройка наблюдается в случае крепления массы в узлах начальных несовершенств.

Полученные теоретические результаты, представленные на рис. 3, хорошо согласуются с численными расчетами [8].

2) **Формы колебаний.** Расчеты показывают, что для несовершенного кольца без присоединенной массы меньшей из расщепленных собственных частот Ω_{n1} соответствуют синусоидальные изгибные и радиальные колебания, а большей $\Omega_{n2} = 1$ – только косинусоидальные изгибные.

Для идеального кольца с массой при колебаниях с частотой $\Omega = \Omega_{n1}$ косинусоидальная форма взаимодействует с радиальной, а при $\Omega = \Omega_{n2}$ возникает только синусоидальная изгибная форма.

Для кольца с начальными несовершенствами и присоединенной массой все три формы свободных колебаний взаимодействуют, как при $\Omega = \Omega_{n1}$, так и при $\Omega = \Omega_{n2}$.

На рис. 4 представлена зависимость отношения амплитуд a_3/a_1 , отвечающего нижней из расщепленных частоте Ω_{n1} , от M/M_0 (см. рис. 4, а) и от ψ (см. рис. 4, б). Расчеты выполнены при $a_0 = 1$.

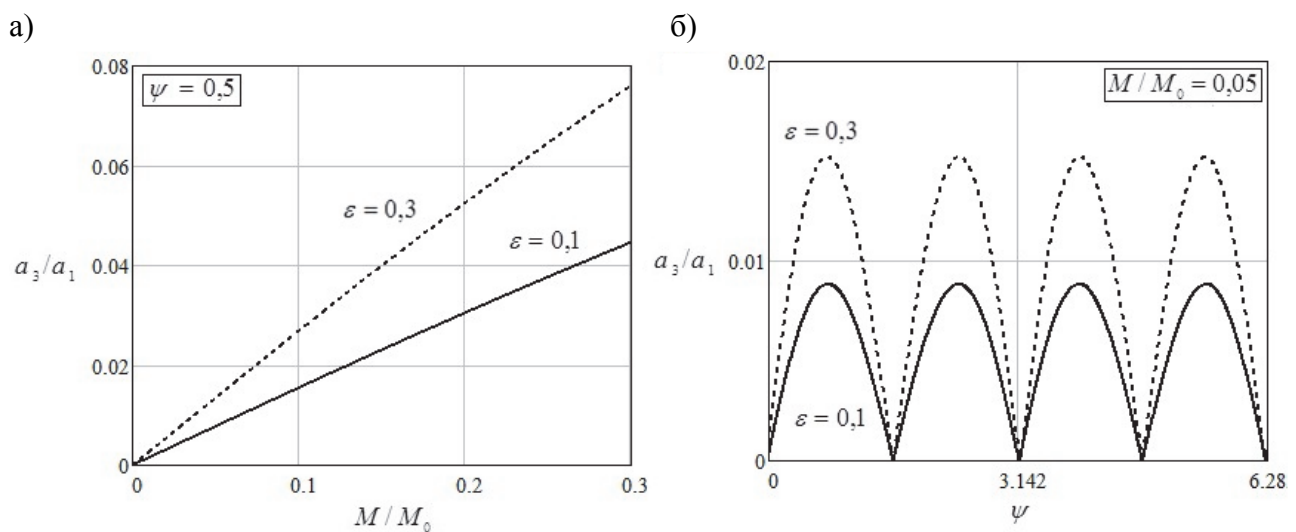


Рис. 4. Отношение амплитуд

Видно, что радиальные колебания малозаметны, однако именно их учет и позволяет установить влияние параметра волнообразования ε на Ω_{n1} .

Численное решение МКЭ. В программном комплексе MSC «Nastran» смоделирована и решена задача о колебаниях кольца ($R/h = 200$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ мПа, $\rho = 7800$ кг/м³) с начальными неправильностями, изменяющимися по закону $w_0(y) = ha_0 \sin(n_0 y/R)$ при $a_0 = 1$; $n_0 = 8$. Считалось, что к кольцу в узлах начальных неправильностей и в местах наибольших отклонений от идеальной формы присоединена масса.

На рис. 5 представлена зависимость расщепленных собственных частот Ω_{n1} и Ω_{n2} от M/M_0 и числа волн n . Пунктирной линией обозначен случай крепления массы в узлах начальных неправильностей, а штриховой – в местах наибольшего отклонения (выпукло-

стей) от идеальной круговой формы. Две верхние линии отвечают Ω_{n2} , две нижние – Ω_{n1} .

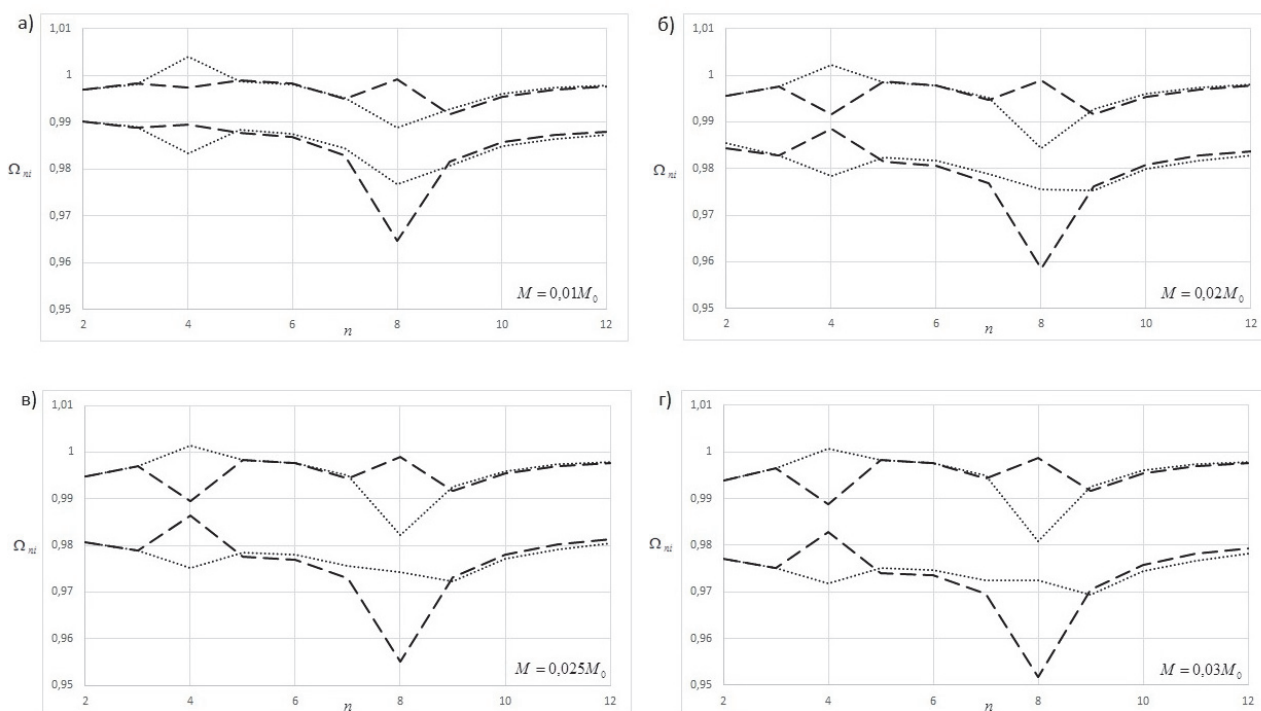


Рис. 5. Частоты колебаний кольца с начальными несовершенствами и присоединенной массой

Видно, что большая из расщепленных частот Ω_{n2} во всех случаях близка к 1. Расщепление, как и в [10-11], происходит при $n_0 = n$ и при $n_0 = 2n$. Устранить нежелательный эффект расщепления изгибного частотного спектра и при $n_0 = n$, и при $n_0 = 2n$ не удастся, однако им, как это следует из рис. 5 и нового теоретического решения, можно управлять путем соответствующего подбора величины и места крепления присоединенной массы.

Выводы. Уточнение математической модели позволило установить ряд особенностей влияния присоединенной массы на колебания как идеального, так и несовершенного кругового кольца.

- Начальные отклонения от идеальной круговой формы или присоединенная масса приводят к расщеплению изгибного частотного спектра. При этом, в теоретических расчетах, большая из расщепленных собственных частот всегда равна частоте колебаний идеального кольца, а низшая – всегда меньше частоты колебаний идеального кольца и зависит как от параметра волнообразования, характеризующего относительную толщину кольца, так и от амплитуды начальных неправильностей или от величины присоединенной массы.

- Динамическая асимметрия (начальные неправильности, присоединенная масса) приводит не только к связанности сопряженных изгибных форм, но и к взаимодействию изгибных колебаний кольца с радиальными.

- Численные расчеты показали, что расщепление изгибного частотного спектра происходит не только при $n_0 = n$, как следует из теории, но и при $n_0 = 2n$. При этом большая из расщепленных собственных частот близка к частоте колебаний идеального кольца, а меньшая – всегда снижается с ростом величины присоединенной массы.

- Теоретическое и численное исследования показали, что устранить нежелательный эффект расщепления изгибного частотного спектра несовершенного кольца не удастся,



однако им можно управлять путем соответствующего подбора величины и места крепления присоединенной массы.

Сделанные выводы, по-видимому, справедливы и для случая колебаний круговых цилиндрических оболочек конечной длины с начальными неправильностями и присоединенной массой.

Работа выполнена по НИР 11.46 в рамках государственного задания № 2014/68 Минобрнауки РФ

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко, В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская // Киев. – М.: Наукова думка, 1984. – 220 с.
2. Amabili, M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – New York, USA: Cambridge university press, 2008.
3. Серёгин, С. В. Исследование динамических характеристик оболочек с отверстиями и присоединенной массой / С. В. Серёгин // Вестник МГСУ. – 2014. – № 4. – С. 52-58.
4. Серёгин, С. В. Влияние присоединенного тела на частоты и формы свободных колебаний цилиндрических оболочек / С. В. Серёгин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 3. – С. 35-39.
5. Серёгин, С. В. Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний / С. В. Серёгин // Вестник МГСУ. – 2014. – № 7. – С. 64-74.
6. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972.
7. Андреев, Л. В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л. В. Андреев, А. Л. Дышко, И. Д. Павленко. – М.: Машиностроение, 1988.
8. Тарануха, Н. А. О влиянии начальных неправильностей и малой присоединенной массы на расщепление изгибного частотного спектра тонких круговых цилиндрических оболочек / Н. А. Тарануха, Г. С. Лейзерович // Вестник Саратовского государственного технического университета. – Саратов: СГТУ, 2010. – № 1. – С. 18-23.
9. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. Собственные колебания кольца с присоединенной массой / С. В. Серёгин. – № 2014611938. – 2013.
10. Лейзерович, Г. С. О влиянии малой присоединенной массы на расщепление частотного спектра кругового кольца с начальными неправильностями / Г. С. Лейзерович, Н. Б. Приходько, С. В. Серёгин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 6. – С. 49-51.
11. Лейзерович, Г. С. О влиянии малой присоединенной массы на колебания разнотолщинного кругового кольца / Г. С. Лейзерович, Н. Б. Приходько, С. В. Серёгин // Строительство и реконструкция. – Орел: Госуниверситет-УНПК. – 2013. – № 4. – С. 38-41.