

Сергеева А. М., Ткачева А. В.
A.M.Sergeeva, A.V.Tkacheva

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕДОКОЛЬНОГО УСТРОЙСТВА, СПОСОБСТВУЮЩЕГО ДЕФОРМИРОВАНИЮ И РАЗРУШЕНИЮ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

MATHEMATICAL MODEL OF AN ICEBREAKING DEVICE ATTACHED TO A SEA VESSEL THAT CAUSES DEFORMATION AND DESTRUCTION OF ICE COVER



Сергеева Анастасия Михайловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии ДВО РАН (г. Комсомольск-на-Амуре). E-mail: serg-nasty@mail.ru

Ms. Anastasiya M. Sergeeva – PhD of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Komsomolsk-on-Amur). E-mail: serg-nasty@mail.ru

Ткачева Анастасия Валерьевна - аспирант Института машиноведения и металлургии ДВО РАН (г. Комсомольск-на-Амуре). E-mail: 4nansi4@mail.ru

Ms. Anastasiya V. Tkacheva - PhD Candidate, Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Komsomolsk-on-Amur). E-mail: 4nansi4@mail.ru

Аннотация: с использованием теории малых упругих деформаций и определенного численного метода строится математическая модель ледокольного устройства в виде катамарана. В работе решается пространственная задача о деформировании ледяного покрова ледокольной приставкой, проводится анализ зависимости ледоразрушающей способности устройства от скорости его движения.

Abstract: Applying the theory of small elastic deformations and a numerical method, a mathematical model of an icebreaking device in the form of a catamaran is built. The paper provides a solution to a spatial problem of deformation of ice cover by an icebreaking device, analysis is carried out of the dependence of ice-breaking ability of the device on the speed of its movement.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные методы, напряженно-деформированное состояние ледяного покрова.

Key words: mathematic modeling, numerical methods, stress-strain state of ice cover.

УДК 621.771: 539.3

Работа выполнена при поддержке РФФИ 11-01-98500-р_восток_a

Введение. С появлением на реках ледяного покрова, эксплуатация водного транспорта становится невозможным. Решением этой проблемы может стать использование ледоразрушающего устройства, которое очистит фарватер ото льда. Одно из таких устройств рассмотрено в данной работе.

Работа направлена на изучение напряженно - деформированного состояния (НДС) ледяного покрова, которое вызвано динамической нагрузкой. Целью работы является исследование зависимости НДС льда от скорости передвижения ледокольного устройства.

Описание устройства. Рассмотрим ледоразрушающее устройство, защищенное патентом [6]. В носовой оконечности судна 1 (рис.1) при помощи креплений 2 устанавливаются

Сергеева А. М., Ткачева А. В.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕДОКОЛЬНОГО УСТРОЙСТВА, СПОСОБСТВУЮЩЕГО
ДЕФОРМИРОВАНИЮ И РАЗРУШЕНИЮ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

ледокольную приставку 3, перед которой в ледяном покрове 4 создают свободную кромку. Приставку 3 выполняют в виде плавучей емкости, в диаметральной плоскости которой устанавливают форштевень 6, наклоненный под углом β к горизонтальной поверхности. При достаточном расстоянии l между клиньями возникают усилия, приводящие к потере устойчивости формы участка льда, заключенного между ножами. Отломанные участки льда прижимаются наклонным днищем приставки, и его обломки раздвинутся под кромки образовавшегося канала.

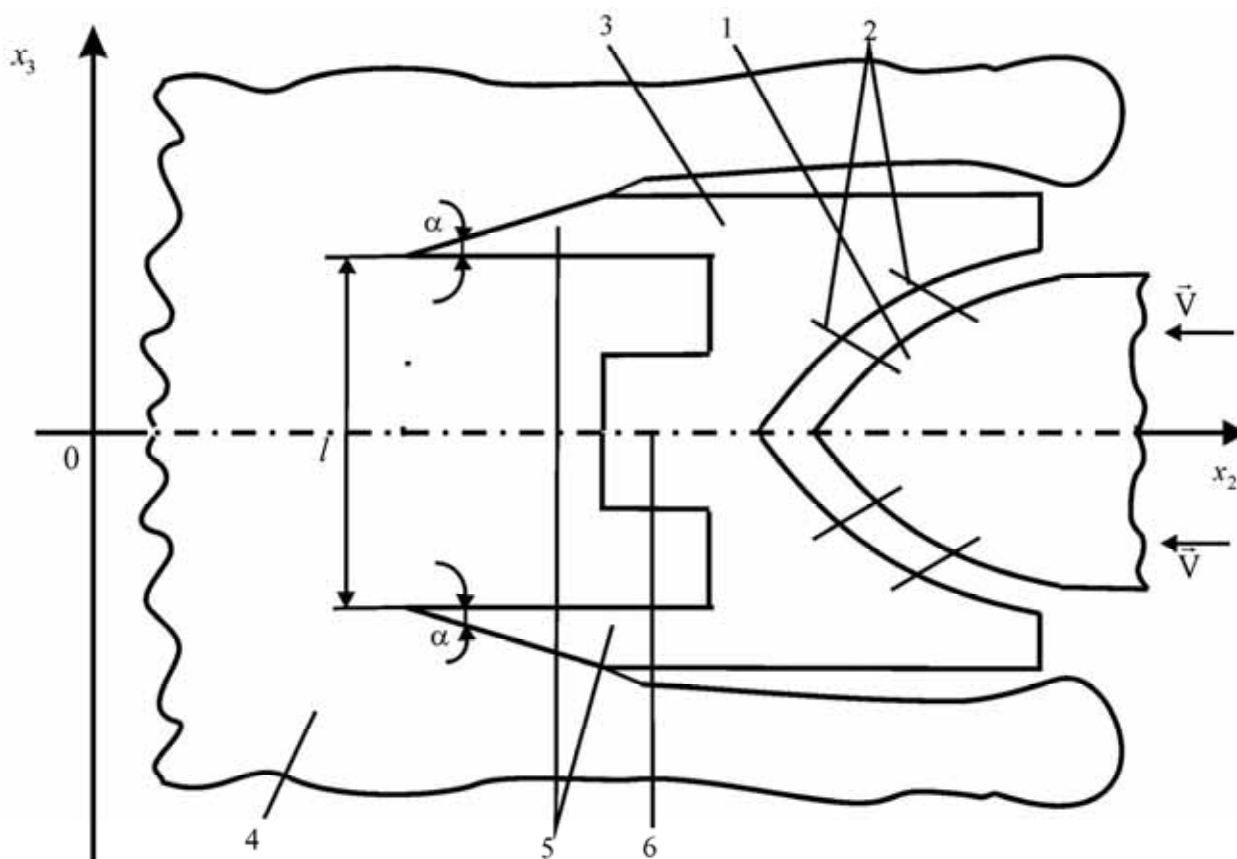


Рис.1 Схема ледокольной приставки

Данное устройство является симметричным относительно плоскости симметрии, проходящей вдоль судна от носовой части до кормы. Поэтому рассмотрим 1/2 области деформирования льда и 1/2 носовой части ледоразрушающего устройства (рис. 2).

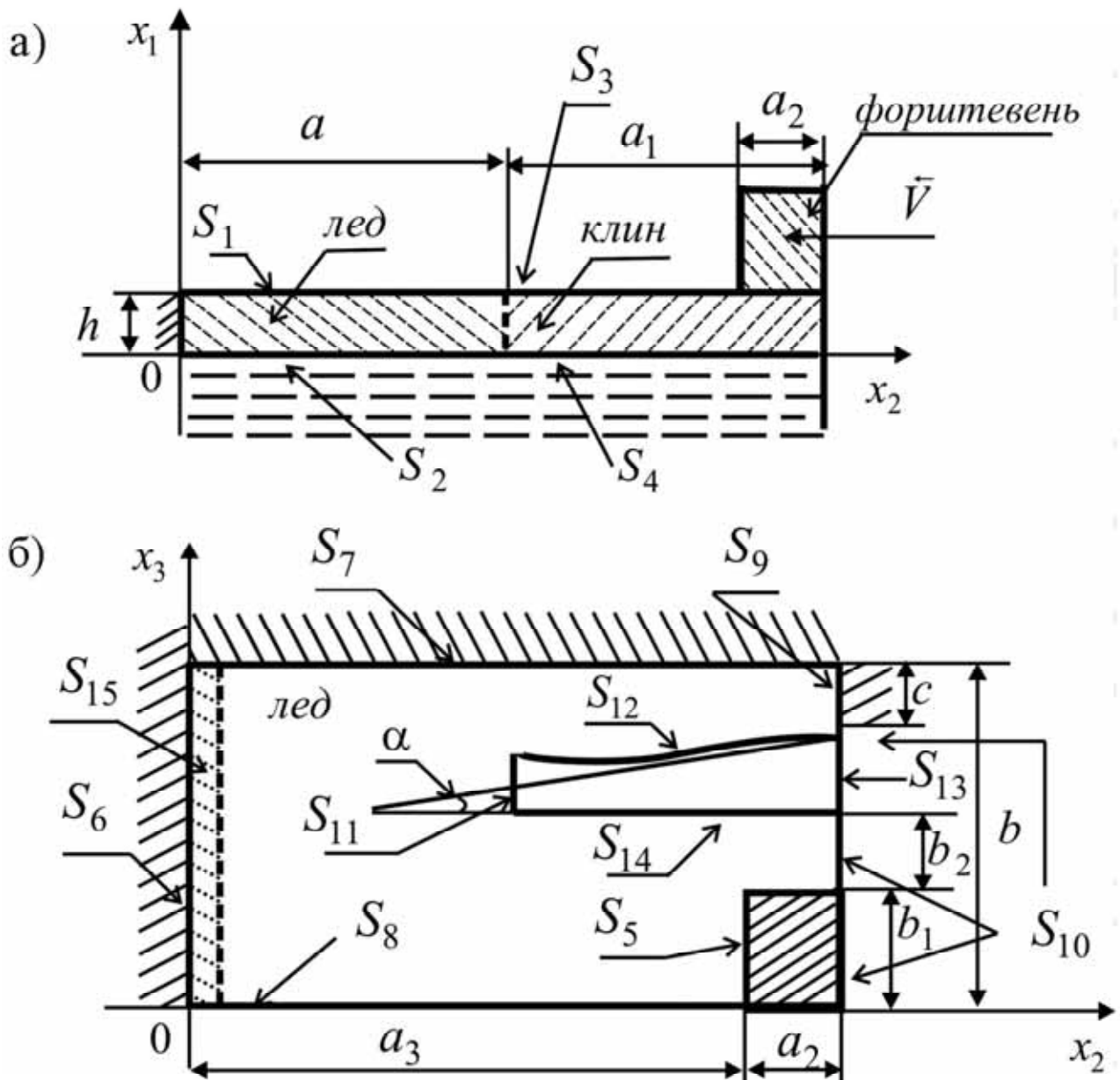


Рис.2 Схема, поясняющая взаимодействие ледокольной приставки с ледяным покровом: а — в плоскости Ox_1x_2 , б — в плоскости Ox_2x_3 .

Схема нагружения ледяного покрова, осуществляемого ледокольной приставкой представлена на рисунке 2.

Плоскость, расположенную на расстоянии h (h — толщина льда) от плоскости Ox_2x_3 , разобьем на три области S_1 , S_3 , S_5 , где S_1 — поверхность, моделирующая взаимодействия льда с атмосферой, S_3 — область взаимодействия клина с атмосферой, S_5 — область контакта надводной части форштевня с ледяным покровом. В плоскости Ox_2x_3 выделим две поверхности S_2 и S_4 , где S_2 — характеризует взаимодействие льда с несжимаемой идеальной жидкостью — водой, S_4 — область взаимодействия клина с водой. Поверхности S_8 и S_7 расположены параллельно друг другу, причем S_8 находится в плоскости симметрии, а S_7 на

Сергеева А. М., Ткачева А. В.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕДОКОЛЬНОГО УСТРОЙСТВА, СПОСОБСТВУЮЩЕГО ДЕФОРМИРОВАНИЮ И РАЗРУШЕНИЮ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА

расстоянии b от нее. Поверхность S_6 расположена в плоскости Ox_1x_3 и на расстоянии $a_3 + a_2$ от нее параллельно расположены поверхности S_{10} , S_{13} , S_9 , где S_{10} — свободной кромки льда, S_{13} — площадка основания клина, S_9 — моделирует жесткое взаимодействие рассматриваемой области с неподвижным ледяным полем. Площадки S_{10} и S_{12} характеризуют боковые части клина, причем S_{10} лежит параллельно плоскости Ox_1x_2 на расстоянии $(b_1 + b_2)$, а S_{12} находится под углом α к S_{10} . Область S_{11} , расположена параллельно плоскости Ox_1x_3 , характеризует площадку острие клина. Материал, из которого изготовлена ледокольная приставка, в данной работе не исследуется, клин принимается как жесткое тело.

Построение математической модели.

При построении математической модели следует учитывать физико-механические свойства пресноводного ледяного покрова.

Пусть лед несжимаемая среда с температурной анизотропией по толщине, из работы [2] известно, что при температурах ниже -30°C и при нагрузках менее 1 минуты ведет себя упруго. В данной работе температура окружающей среды $\theta = -30^\circ\text{C}$, время контакта устройства с ледяным покровом менее 1 минуты. Примем лед как упругое тело, по данным работы [1] имеем: модуль Юнга — $E = (87.6 - 0.21\theta - 0.0017\theta^2) \cdot 10^2 \text{ МПа}$; θ — температура льда; коэффициент Пуассона — $\mu = 0.5$; модуль сдвига — $G = E / 2(1 + \mu)$.

Используя уравнения теории упругости для малых деформаций, запишем систему дифференциальных уравнений в эйлеровой системе координат.

Уравнение движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i - I_i = 0; \quad I_i = \rho \left(\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Закон Гука для малых деформаций

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}^*; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}),$$
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad \xi_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} \Rightarrow \varepsilon_{ij} \cong \sum_m \xi_{ij} \Delta \tau_m, \quad (2)$$

Уравнение сохранения массы

$$v_{i,i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = 0; \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

В уравнениях (1, 2, 3, 4) используется суммирование по повторяющимся индексам; ρ — плотность льда; $G = G(\theta)$ — модуль сдвига льда; $[\sigma_{ij}]$ — тензор напряжений; $[\varepsilon_{ij}]$ — тензор деформаций; v_i , F_i — проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям x_i , $i = 1, 2, 3$; $F_2 = F_3 = 0$; λ — коэффициент теплопроводности; θ — температура льда; $\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$, τ — время деформации, K — коэффициент объемного сжатия.

Начальные условия задачи $v_i|_{\tau=0} = 0$, $\varepsilon_{ij}|_{\tau=0} = 0$.

Граничные условия задачи (рис.2).

$$\sigma_{11}|_{S_1} = -p_0; \quad \sigma_{11}|_{S_2} = -(p_0 + \gamma h); \quad \sigma_{11}|_{S_i} = 0, \quad i = 3, 4;$$

$$\begin{aligned}
 &(\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_i} = 0, \quad i=1, 2, 3, 4, 5, 15; \quad \sigma_{22}|_{S_i} = 0; \quad i=6, 13; \\
 &(\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{S_i} = 0; \quad i=6, 10, 11, 13; \quad v_2|_{S_i} = 0, \quad (\sigma_{31} = \sigma_{32})|_{S_i} = 0, \quad i=7, 8; \\
 &v_3|_{S_i} = 0, \quad i=7, 8, 14; \quad v_1|_{S_5} = -V \operatorname{tg}(\beta); \quad v_1|_{S_{15}} = 0; \quad v_2|_{S_{11}} = -V; \quad v_3|_{S_{12}} = V \sin(\alpha).
 \end{aligned}$$

Здесь p_0 — атмосферное давление, γ — удельный вес льда, h — толщина льда, V — скорость передвижения судна, β — угол наклона форштевня к горизонту принят равным 15° , α — угол острия клина (рис.2) принят равным 35° .

Для расчета температурного поля воспользуемся решением уравнения теплопроводности приведенного в работе [4], поэтому с учетом $\lambda = \lambda_0(1 + a\theta)$ запишем его в конечном виде:

$$\theta = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{x_1}{h} \left(\frac{2\theta_1}{a} + \theta_1^2 \right)}. \quad (6)$$

При выводе (6) использовались граничные условия при $x_1 = 0$, $\theta = 0^\circ \text{C}$ при $x_1 = h$, $\theta_1 = -30^\circ \text{C}$, h — толщина льда, $a = -0.0159 \text{ град}^{-1}$.

Для решения системы исходных уравнений с учетом принятых граничных условий и параметров, характеризующих свойства пресноводного льда, применялся определенный численный метод. Согласно выбранному методу определялась система разрешающих уравнений, решаемая по разработанному алгоритму [7] с учетом граничных условий.

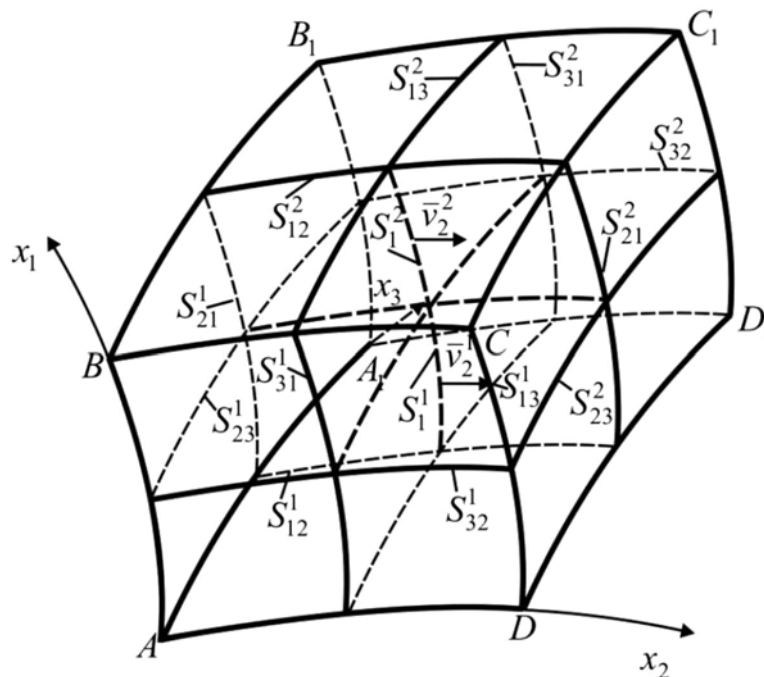


Рис.3. Ортогональный элемент

Уравнение движения запишем в разностной форме для произвольного ортогонального криволинейного элемента (рис.3):

$$\begin{aligned}
 &S_{ik} \Delta S_{ij} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + S_{ij} \Delta S_{ik} (\sigma_{ii} - \sigma_{kk}) + 1/2 \Delta \sigma_{ii} S_{ij} S_{ik} + \\
 &+ 1/2 \Delta \sigma_{ik} S_{ki} S_{kj} + 1/2 \Delta \sigma_{ij} S_{ji} S_{jk} + (S_{ji} \Delta S_{jk} + 2S_{jk} \Delta S_{ji}) \sigma_{ij} + \\
 &+ (S_{ki} \Delta S_{kj} + 2S_{kj} \Delta S_{ki}) \sigma_{ik} + (F_i - I_i) \cdot 2V^* = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь $i, j, k=1,2,3; i \neq j \neq k$; V^* — объем элемента; $V = \frac{1}{8} S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{21}$; I_i — проекции инерционной силы, отнесенной к единице объема на оси $x_i, i, j, k=1,2,3$; $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$ — величина дуги средней линии, расположенной на грани j вдоль координаты x_j и перпендикулярной координате x_i ; $\Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$; $S_{ik}^j (i, k=1,2,3; i \neq k; j=1,2)$. Значения S_{ik}^j вычисляются как средние от значений дуг ребер (рис.3). Например, $S_{23}^1 = 0,5 \left(\left| \overset{\cup}{AA_1} \right| + \left| \overset{\cup}{BB_1} \right| \right)$. $\sigma_{ii}^L (i=1,2,3; L=1,2)$ — нормальное напряжение, действующее на криволинейной поверхности «L» элемента, нормалью к которой является касательная к координате x_i ; $\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)$, $\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1$, $(i, j=1,2,3), i \neq j$, σ_{ij}^L — касательное напряжение, действующее на криволинейной поверхности «L» элемента, нормалью к которой является касательная к координате x_i .

Скорости сдвиговых деформаций $\xi_{ij} (i \neq j)$ по элементу определяются как средние от значений скоростей деформаций в узлах элемента

$$\xi_{ij} = 0,125(\xi_{ij}^A + \xi_{ij}^B + \xi_{ij}^D + \xi_{ij}^C + \xi_{ij}^{A_1} + \xi_{ij}^{B_1} + \xi_{ij}^{D_1} + \xi_{ij}^{C_1}) .$$

Значение скорости сдвиговой деформации в узле определяется по формуле

$$\xi_{ij}^0 = \frac{2\Delta \bar{v}_j}{S_i} - 0,5 \bar{v}_j \frac{S_j^+ - S_j^-}{S_i S_j} + \frac{2\Delta \bar{v}_i}{S_j} - 0,5 \bar{v}_i \frac{S_i^+ - S_i^-}{S_i S_j}, (i, j=1,2,3; i \neq j),$$

где $S_i = S_i^1 + S_i^2$; $S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}$; $S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}$; $\Delta \bar{v}_i = \bar{v}_i^2 - \bar{v}_i^1$.

Здесь S_i^{1+}, S_i^{1-} — дуга граней элемента, следующая за S_i^1 по координате j соответственно в положительную (+) и отрицательную (-) стороны; аналогично S_i^{2+}, S_i^{2-} — только относительно S_i^2 ; значения $\bar{v}_i^j (j=1,2)$ вычисляются как средние от значений v_i^j по граням, примыкающих к данному ребру.

Схема решения задачи.

1. Исследуемая область деформирования разбивается на элементы ортогональной формы. Рассчитывается матрица длин дуг элементов.
2. Время исследования (деформирования) τ разбивается на m временных промежутков $\tau = \sum_m \Delta \tau_m$.
3. Задаются начальные условия задачи, $\bar{v}_i = 0$.
4. Задаем шаг по времени $\tau = \Delta \tau$.
5. Задаются граничные условия задачи.
6. Насчитывается поле температур по каждому элементу.
7. Насчитываются значения модуля сдвига по каждому элементу.
8. Насчитывается матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с последовательностью, описанной в работах [4, 5].
9. Решается система линейных уравнений по алгоритму, описанному в работе [7].
10. По каждому элементу (его граням) (ij) насчитываются $\sigma_{ij}, v_i, \xi_{ij}, \varepsilon_{ij}$.
11. Уточняются значения \bar{v}_i . Производится сравнение $(\bar{v}_i)_n$ и $(\bar{v}_i)_{n-1}$, n — номер итерации. Если заданная точность соответствия $(\bar{v}_i)_n$ и $(\bar{v}_i)_{n-1}$ удовлетворяется, то следует операция 12, в противном случае осуществляется операция 8.
12. Окончание расчета.

Анализ численных результатов. В данной работе исследуется НДС ледяного покрова, возникающее при воздействии на него ледоразрушающим устройством со скоростью пере-

движения на чистой воде $V=6$ км/ч, $V=8$ км/ч, $V=10$ км/ч. В качестве критериев нарушения сплошности ледяного покрова примем напряжения $\sigma_{кр}^{рас} \approx 4$ МПа, $\sigma_{кр}^{сж} \approx -8$ МПа, приведенные в работе [1].

На рис. 4, 5, 6 представлены схемы областей ледяного покрова, в которых возникают нарушения сплошности (верхний слой толщиной 0.3 м). Нарушения сплошности обозначены волнистыми линиями. Приведены результаты численного решения при скоростях передвижения устройства $V=6$ км/ч (рис.4), $V=8$ км/ч (рис.5), $V=10$ км/ч (рис.6).

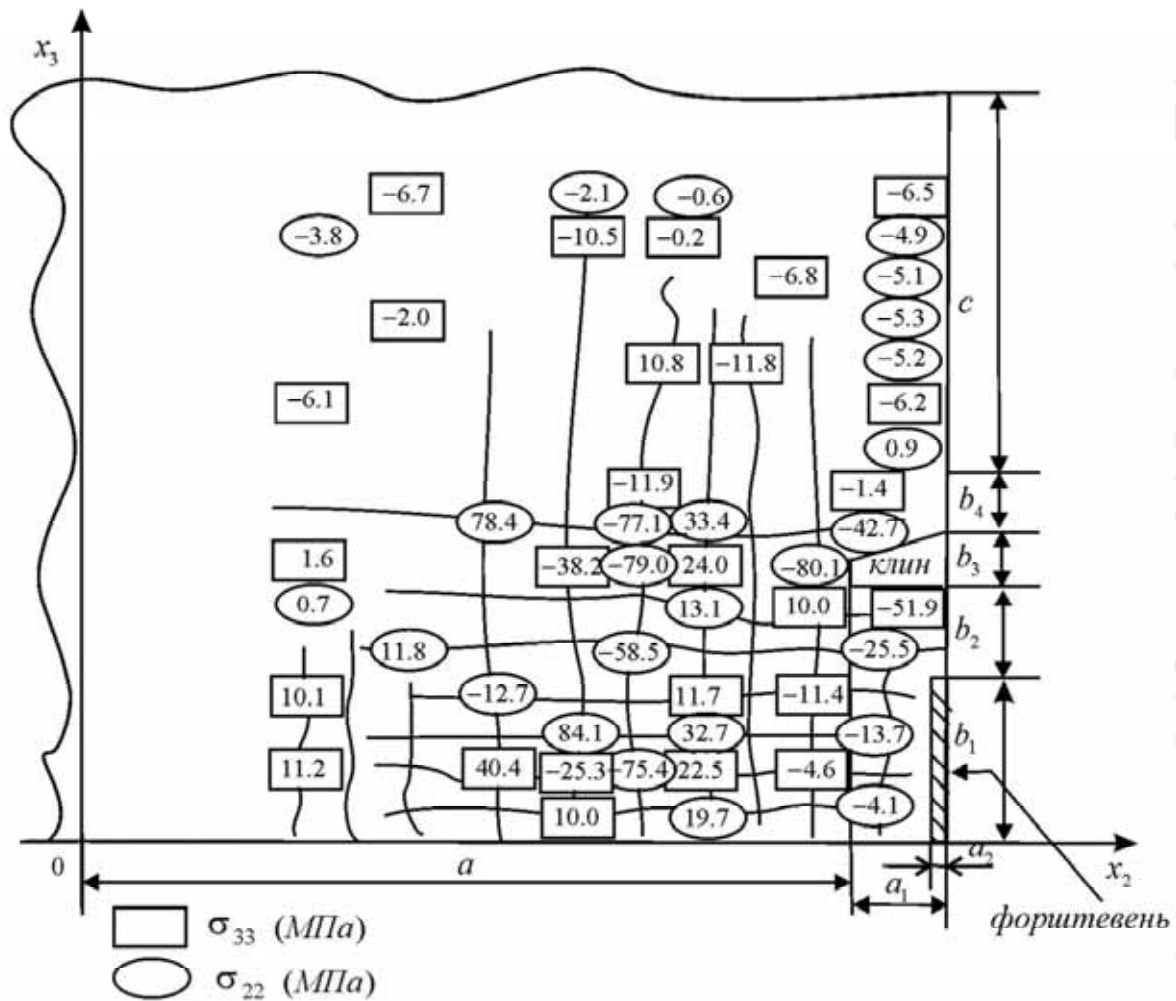


Рис. 4 Схемы, поясняющие возникновение нарушений сплошности в ледяном покрове $V=6$ км/ч

Расчеты проводились при следующих геометрических параметрах устройства: a - длина льда от клина до закрепленной части льда 16.5 м; a_1 - глубина внедрения клина в лед 2.1 м; a_2 - ширина площадки контакта форштевня с ледяным покровом принята равной 0.3 м; b - ширина исследуемой области ледяного покрова 16 м (рис. 2 б); b_1 - половина ширины форштевня 3.5 м; b_2 - расстояние от форштевня до клина 2 м; b_3 - ширина клина у основания принята равной 1.13 м; b_4 - ширина свободной кромки льда от клина до закрепленной части льда 1.1 м. Толщина льда 1.0 м. Время контакта системы нагрузок со льдом $\Delta\tau = 0.01$ с.

Рассмотрим подробнее НДС ледяного покрова в области внедрения клина, при $V=6$ км/ч, $V=8$ км/ч здесь действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения, а при $V=10$ км/ч

только сжимающие напряжения. Напротив острия клина во всех трех случаях фиксируется сжимающее напряжение.

Сбоку от устройства при $V=6\text{км/ч}$ имеют место сжимающие напряжения, при $V=8\text{км/ч}$, $V=10\text{км/ч}$ присутствуют и растягивающие напряжения. В области находящейся между клиньями устройства при всех рассматриваемых скоростях фиксируются сжимающие напряжения.

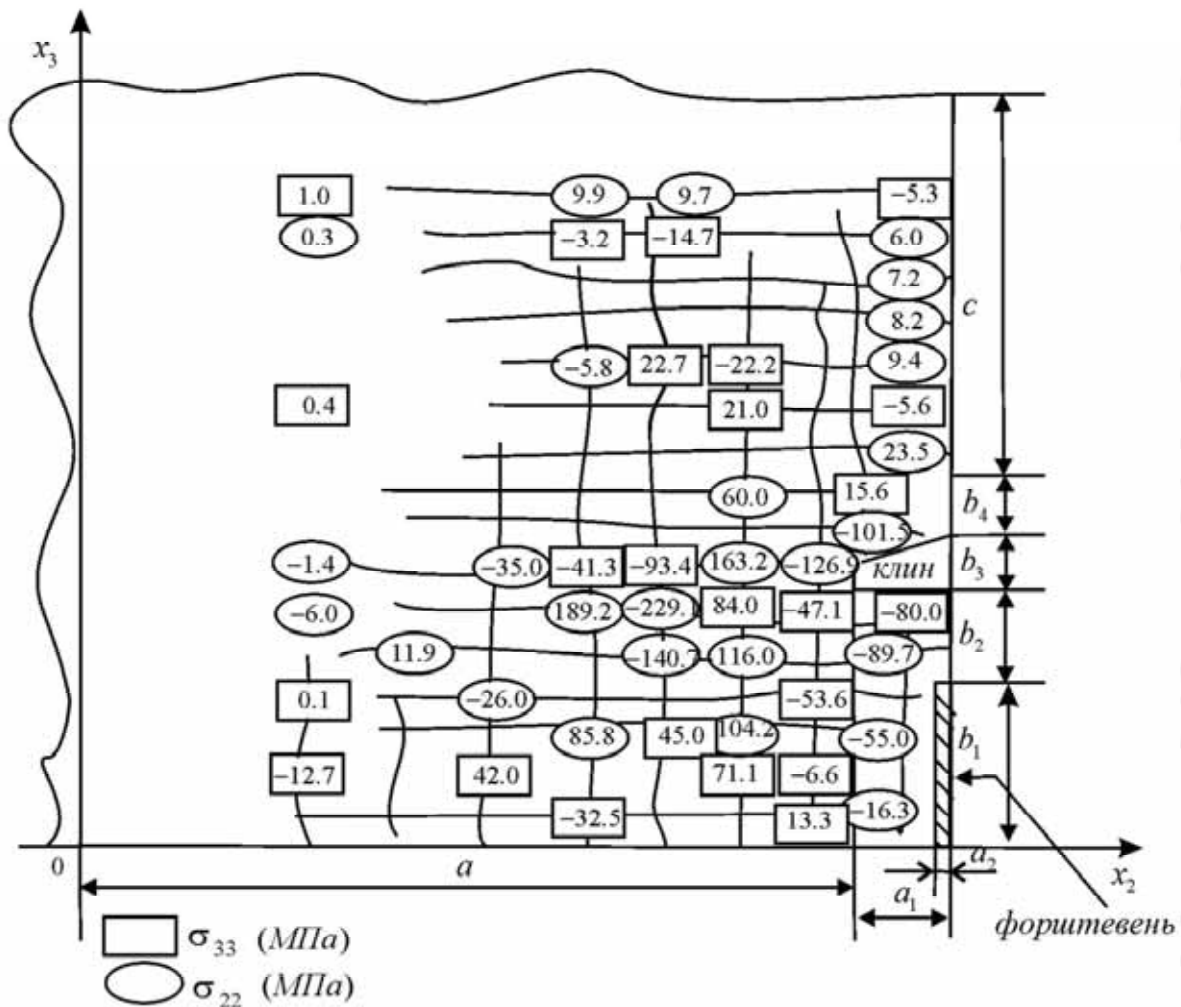


Рис. 5 Схемы, поясняющие возникновение нарушений сплошности в ледяном покрове $V=8\text{ км/ч}$

При скорости движения устройства $V=6\text{км/ч}$ в ледяном покрове существуют максимальное сжимающее напряжение $\sigma_{22} = -80.1\text{МПа}$, сосредоточенное напротив острия клина, и максимальное растягивающее напряжение $\sigma_{22} = 84.1\text{МПа}$, расположенное на расстоянии 8.8 м фронтально от форштевня.

При скорости движения устройства $V=8\text{км/ч}$ в ледяном покрове имеет место максимальное сжимающее напряжение $\sigma_{22} = -229.1\text{МПа}$, расположенное на расстоянии 9 м от устройства, и максимальное растягивающее напряжение $\sigma_{22} = 189.2\text{МПа}$, сосредоточенное на расстоянии 10 м от устройства в направлении к оси Ox_3 .

Максимальные сжимающие и растягивающие напряжения $\sigma_{22} = -66.8\text{МПа}$ и $\sigma_{33} = 73.5\text{МПа}$ расположенные в ледяном покрове в области острия клина, наблюдаются при скорости движения устройства $V=10\text{км/ч}$.

Анализируя характер распределения напряжений на поверхности льда можно сделать вывод о том, что имеет место чередование растягивающих и сжимающих напряжений, такой

характер напряжений свидетельствует о том, что на поверхности льда имеются вздутия и впадины.

В результате проделанной работы можно сделать вывод: что при скорости устройства $V=8$ км/ч в ледяном покрове возникнут наибольшие напряжения.

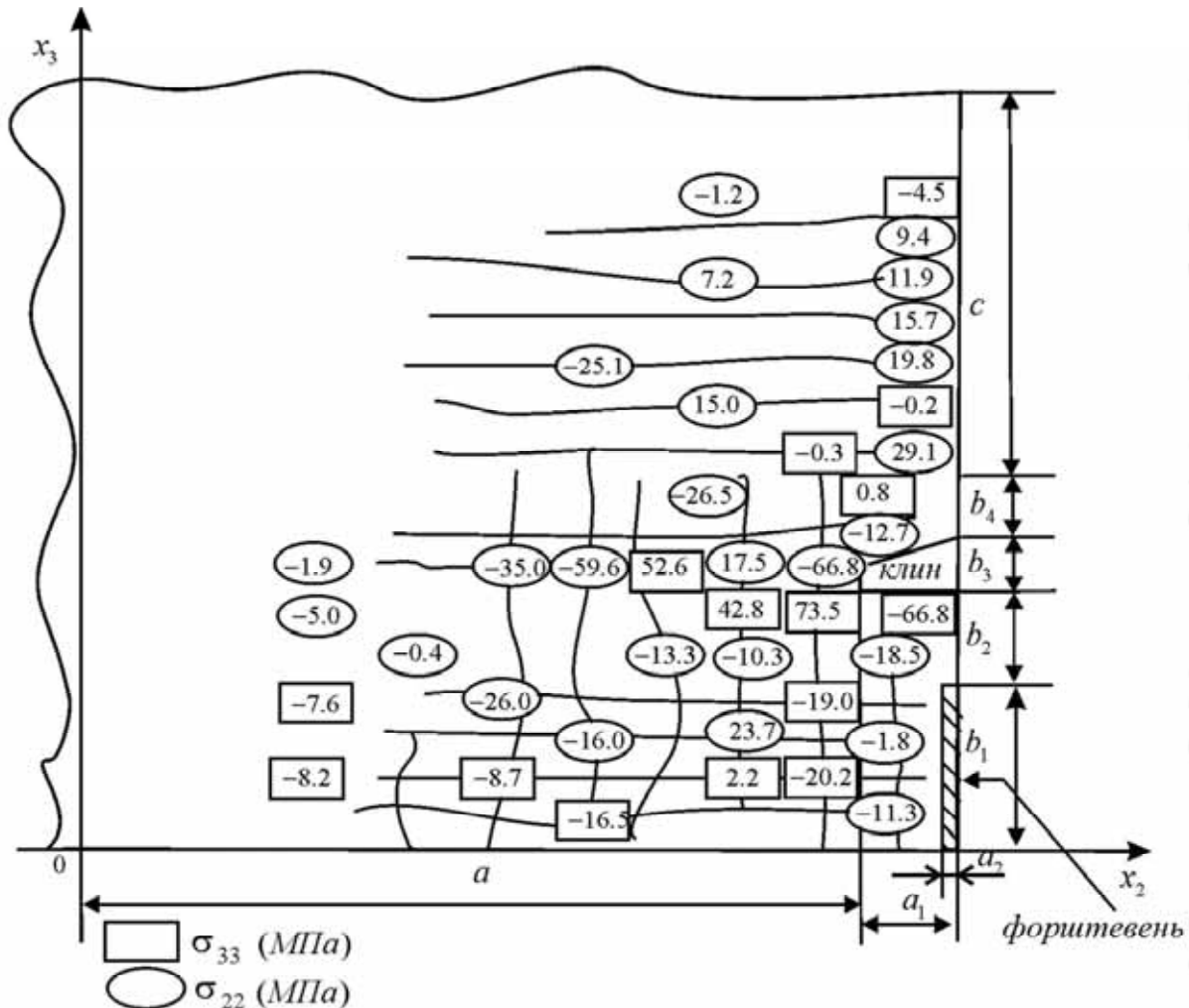


Рис. 6 Схемы, поясняющие возникновение нарушений сплошности в ледяном покрове $V=10$ км/ч.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богородский В.В., Гаврило В.П. Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980.
2. Войтковский К.Ф. Экспериментальные исследования пластических свойств льда / Сезонное промерзание грунтов и применение льда для строительных целей. М.: Издательство АН СССР, 1957.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. / Качанов Л. М. М.: Наука, 1969 – С. 420.
4. Одинокое В. И., Сергеева А. М. Математическое моделирование процесса разрушения льда ледокольной приставкой.// Владивосток Дальнаука, 2007.-С. 153.
5. Одинокое В. И., Сергеева А. М., Захарова Е. А. Построение математической модели для анализа процесса разрушения ледяного покрова.//Математическое моделирование 2008 т.20 №12 С. 15-27.
6. Пат. 2276037 РФ МПК В 63 В 35/08. Ледокольное судно / Одинокое В.И., Колмогоров В.Л. - № 2004114052/11; Заяв. 06.05.2004; Опубл. 10.05.2006, Бюл. № 13..
7. Сергеева А. М., Одинокое В. И. Моделирование экологически безопасного способа разрушения ледяного покрова.// Инженерная экология, 2009 №3 С.53-62.