



Привалова В. В., Стружанов В. В.
V.V.Privalova, V.V.Struzhanov

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ УПРУГОХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ В ХОДЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСТЯЖЕНИЯ

SOME CONSISTENT PATTERN OF ELASTIC-BRITTLE MATERIALS PROPERTIES CHANGE IN THE CYCLIC EXTENSION TIME

Привалова Валентина Викторовна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института машиноведения Уральского отделения Российской академии наук (Россия, Екатеринбург). E-mail: valentprival@gmail.ru.

Ms. Valentina V. Privalova – PhD in Physics and Mathematics, Research Fellow, Institute of Engineering Science, the Urals Branch of Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg). E-mail: valentprival@gmail.ru.

Стружанов Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института машиноведения Уральского отделения Российской академии наук (Россия, Екатеринбург). E-mail: stru@imach.uran.ru.

Mr. Valeriy V. Struzhanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Institute of Engineering Science, the Urals Branch of Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg). E-mail: stru@imach.uran.ru.

Аннотация. В данной работе приведена одна из возможных моделей деградации свойств упруго-хрупкого материала и вырождения диаграммы квазистатического растяжения. Модель основана на изменении плотности вероятности распределения предельных значений деформаций структурных элементов упруго-хрупкого материала в ходе циклирования. При этом изменяется не только вид функции плотности распределения (на первом этапе циклирования), но и изменяется (в сторону уменьшения) область определения этой функции.

Summary. The paper suggests a possible degradation model of the elastic-brittle material properties and de-generation of the quasistatic extension diagram. This model is based on the changing of distribution probability density of deformation limit values of structural elements for elastic-brittle material in the cycling time. In this case both the distribution probability density function type (at first period cycling) and the range of definition for this function (to decrease side) are transformed.

Ключевые слова: упруго-хрупкий, циклирование, квазистатическое растяжение, плотность вероятности распределения предельных значений деформаций.

Key words: elastic-brittle, cycling, quasistatic extension, distribution probability density of deformation limit values.

УДК 593.3

Введение. В феноменологических теориях при построении определяющих соотношений используются результаты макроэксперимента по деформированию образцов материала. Полученные в эксперименте свойства рассматриваются как интегральное отображение процессов, происходящих на микроуровне, без раскрытия структурных механизмов их формирования. Существуют структурные модели [1; 2; 3], позволяющие, по крайней мере, на качественном уровне прогнозировать свойства материала. Возможна и обратная задача о построении структурной модели исходя из результатов макроэксперимента. В этом случае реальному материалу ставится в соответствие его модельное представление. Тогда свойства упруго-хрупкого материала возможно описать одной функцией, а именно: плотностью распределения пределов прочности (деформаций, отвечающих пределам прочности) структурных элементов материала.

В случае циклического нагружения (растяжением) плотность распределения пределов прочности изменяется, что приводит к изменению квазистатической диаграммы деформиро-

вания, то есть наблюдается вырождение этой диаграммы и, следовательно, имеет место деградация свойств (при квазистатическом деформировании) материала.

Данная работа посвящена построению структурной модели упругохрупкого материала по результатам макроэксперимента на квазистатическое растяжение и определение на качественном уровне деградации свойств в ходе циклического нагружения.

Плотность распределения пределов прочности упругохрупкого материала при квазистатическом растяжении. Макроэксперимент на одноосное растяжение элемента материала в условиях жёсткого нагружения позволяет построить полную диаграмму деформирования $\sigma(\varepsilon)$ [5]. По ней определяется касательный модуль $E^p(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ и секущий модуль

$E^s(\varepsilon) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, который для упругохрупкого материала является и модулем разгрузки. Повреждённость материала, связанная с континуальным разрушением, вычисляется по формуле [6]

$$\omega = 1 - \frac{E^s}{E}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга.

Построим структурную модель упругохрупкого материала, взяв за основу модифицированную модель Мазинга [4]. Допустим, что материал состоит из совокупности упругохрупких подэлементов (микроэлементов). Деформация разрушения (или пределы прочности), которая распределена по некоторому закону с плотностью распределения $f_1(\varepsilon)$, заданному на отрезке $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$. Здесь $\varepsilon^t, \varepsilon^z$ – деформации соответственно предела пропорциональности и разрушения, полученные в макроэксперименте. Тогда повреждённость определяется относительным содержанием разрушенных подэлементов, то есть

$$\omega = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon} f_1(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Отсюда, используя равенство (1), находим, что

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(1 - \frac{E^s}{E} \right) = -\frac{1}{E} \frac{dE^s}{d\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{E} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma/d\varepsilon * \varepsilon - \sigma}{\varepsilon^2} = \frac{E^s(\varepsilon) - E^p(\varepsilon)}{E\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученная функция обладает всеми свойствами плотности распределения. Действительно, при $\varepsilon < \varepsilon^t$ касательный и секущий модули равны модулю Юнга и, следовательно, функция $f_1(\varepsilon) = 0$; при $\varepsilon > \varepsilon^z$ имеем $E^s = E^p = 0$ и снова $f_1 = 0$. Итак, вне отрезка $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ плотность распределения равна нулю. Внутри отрезка функция f_1 положительна, так как $E^s > E^p$, и

$$\int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} f_1(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} \left(\frac{d\omega}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon = \omega(\varepsilon^z) - \omega(\varepsilon^t) = 1,$$

Так как $\omega(\varepsilon^z) = 1$, $\omega(\varepsilon^t) = 0$.

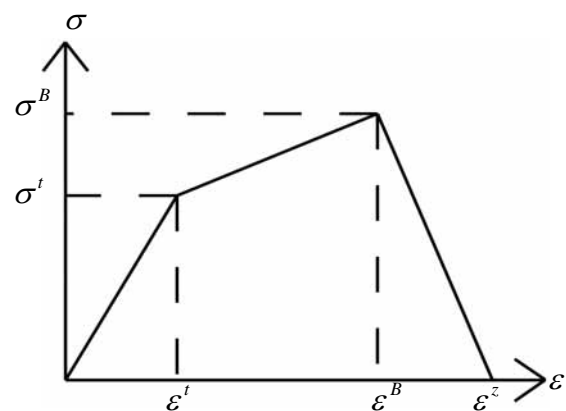


Рис. 1. Кусочно-линейная диаграмма растяжения

Таким образом, реальному материалу ставится в соответствие модельный материал, состоящий из совокупности хрупких подэлементов. Свойства модельного материала определяет одна функция, а именно: плотность распределения предельных деформаций подэлементов [6], вычисленная по формуле (2), в которой используются результаты макроэксперимента.

В качестве примера рассмотрим материал, обладающий кусочно-линейной диаграммой растяжения с линейными восходящей и падающей ветвями (см. рис. 1):

$$\sigma_a(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^t; \\ \sigma^t + E_h^p(\varepsilon - \varepsilon^t), & \varepsilon^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ \sigma^B + E_s^p(\varepsilon - \varepsilon^B), & \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z, \end{cases}$$

где $\sigma^t = E\varepsilon^t$ – предел пропорциональности; $E_h^p = \frac{\sigma^B - \sigma^t}{\varepsilon^B - \varepsilon^t} = \frac{E(\gamma - 1)}{\alpha - 1}$ – модуль упрочнения; $\varepsilon^B = \alpha\varepsilon^t$, $\sigma^B = \gamma\sigma^t$ – соответственно деформация и предел прочности ей соответствующий; $\sigma^z = 0$, $\varepsilon^z = z\varepsilon^B = z\alpha\varepsilon^t$; $E_s^p = -\frac{\sigma^B}{\varepsilon^z - \varepsilon^B} = -\frac{E\gamma}{\alpha(z-1)}$ – модуль разупрочнения; $z, \alpha, \gamma > 1$; $\alpha > \gamma$.

Отсюда

$$E^s = \begin{cases} E, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^t; \\ \frac{E}{\alpha - 1} \left[(\gamma - 1) + (\alpha - \gamma) \frac{\varepsilon^t}{\varepsilon} \right], & \varepsilon^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ \frac{\gamma E}{z - 1} \left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{z\varepsilon^t}{\varepsilon} \right], & \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z. \end{cases}$$

Теперь по формуле (2) находим, что

$$f_1(\varepsilon) = \begin{cases} f_1', & \varepsilon^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ f_1'', & \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z, \end{cases}$$

где $f_1' = \frac{(\alpha - \gamma)\varepsilon^t}{(\alpha - 1)\varepsilon^2}$; $f_1'' = \frac{z\gamma\varepsilon^t}{z\varepsilon^2}$.

Вне отрезка $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ функция f_1 равна нулю. Площадь, ограниченная двумя кривыми f_1' и f_1'' , составляет величину

$$\int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} f_1(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^B} f_1'(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{\varepsilon^B}^{\varepsilon^z} f_1''(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Качественный вид функции $f_1(\varepsilon)$ изображён на

рис. 2, где $a = \frac{\alpha - \gamma}{(\alpha - 1)\varepsilon^t}$, $b = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha^2(\alpha - 1)\varepsilon^t}$,

$$c + b = \frac{\gamma z}{\alpha^2(\alpha - 1)\varepsilon^t}, \quad d = \frac{\gamma}{z\alpha^2(\alpha - 1)\varepsilon^t}.$$

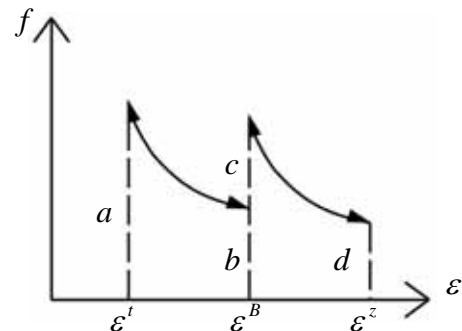


Рис. 2. Плотность распределения предельных деформаций подэлементов модельного материала, отвечающего реальному упругохрупкому материалу с кусочно-линейной диаграммой

Деградация свойств при циклическом растяжении. Зададим для примера плотность распределения деформаций, отвечающих пределам прочности компонент материала, в виде:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{h}{\varepsilon^* - \varepsilon^t} (\varepsilon - \varepsilon^t), & \varepsilon^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*; \\ \frac{h}{\varepsilon^z - \varepsilon^*} (\varepsilon^t - \varepsilon), & \varepsilon^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z, \end{cases}$$

где $h = 2/(\varepsilon^z - \varepsilon^t)$; ε^z и ε^t – деформации разрушения самых прочных и самых слабых элементов структуры, $\varepsilon^t \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon^z$. Непосредственно проверяется, что $\int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} f_1(\varepsilon) d\varepsilon = 1$. График функции $f(\varepsilon)$ изображён на рис. 3.

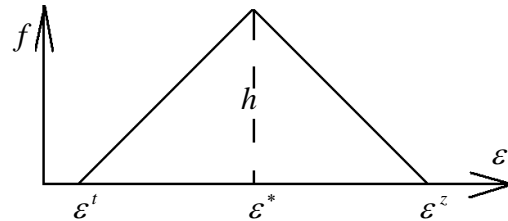


Рис. 3. Плотность распределения $f(\varepsilon)$

Введём параметр t , который может иметь смысл непрерывного времени или целочисленного количества циклов нагружения. Пусть в начальный момент процесса циклирования $t=0$, $\varepsilon^*|_{t=0} = \varepsilon_0^* = 0,05$, а величины $\varepsilon^t|_{t=0} = \varepsilon_0^t = 0,01$, $\varepsilon^z|_{t=0} = \varepsilon_0^z = 0,06$. Тогда, используя модель Мазинга растяжения пучка, находим, что диаграмма растяжения имеет вид кривой 1 на рис. 4. При её построении модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^4$ кГ/мм², $G = E(1 - \omega(\varepsilon))\varepsilon$, $\omega = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon} f_1(\varepsilon) d\varepsilon$.

На первом этапе циклирования изменяется соотношение прочных и слабых элементов внутри отрезка $[\varepsilon_0^t, \varepsilon_0^z]$, которое отражается в изменении плотности вероятности. Характер этого изменения зависит от параметров циклического нагружения (величина нагрузки циклирования или циклического перемещения, вида цикла – отнулевой, симметричный и т.п.). Свяжем указанное изменение плотности вероятности с изменением параметра ε^* . Пусть величина ε^* уменьшается на первом этапе циклирования от ε_0^* до ε_0^t по некоторому закону, зависящему от параметра t , который за время первого этапа изменяется от 0 до значения t_1 , определяемого экспериментально. В рассмотренном примере закон изменения $\varepsilon^*(t)$ был взят в виде:

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_0^t - \varepsilon_0^*}{t_1} t + \varepsilon_0^*.$$

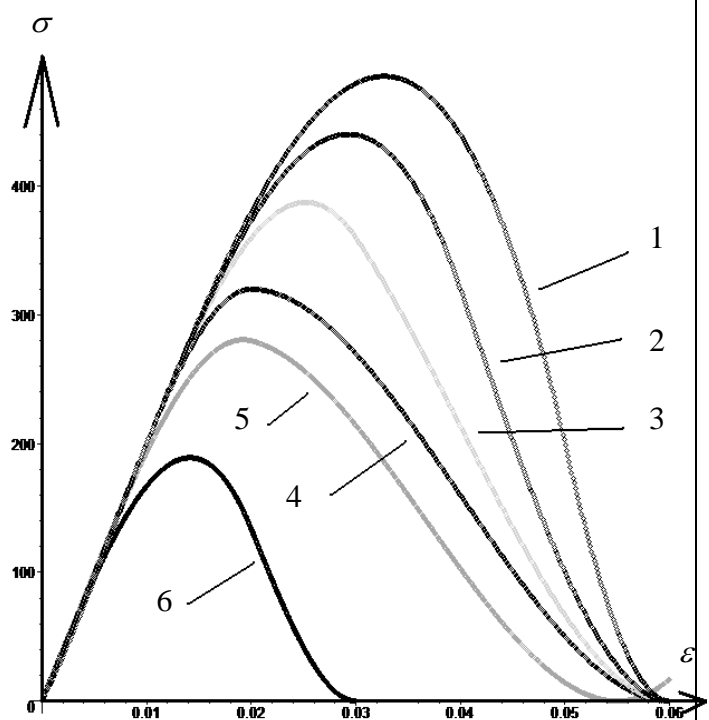


Рис. 4. Вырождение полной диаграммы на трёх этапах циклирования.

На этом этапе плотность распределения деформаций записывается в виде:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{h_0}{\varepsilon_0^* - \varepsilon_0^t} (\varepsilon - \varepsilon_0^t), & \varepsilon_0^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0^*; \\ \frac{h_0}{\varepsilon_0^z - \varepsilon_0^*} (\varepsilon_0^* - \varepsilon), & \varepsilon_0^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0^z, \end{cases}$$

где $h_0 = 2/(\varepsilon_0^z - \varepsilon_0^t)$.

Тогда при $\varepsilon^* = 0,04$ получаем диаграмму 2, при $\varepsilon^* = 0,03$ – диаграмму 3, при $\varepsilon^* = 0,02$ – диаграмму 4 (см. рис. 4). Таким образом, полная диаграмма растяжения вырождается при увеличении числа циклов нагружения. В конце первого этапа ε^* становится равным ε^t .

На втором этапе циклирования происходит изменение (уменьшение) предельных деформаций структурных элементов. Это отражается в параллельном сдвиге границ отрезка $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ влево, то есть ε^t уменьшается от ε_0^t до ε_1^t , а ε^z уменьшается от ε_0^z до ε_1^z , то есть прочность всех волокон падает. Запишем законы изменения ε^t и ε^z от параметра t , который за время второго этапа изменяется от t_1 до значения t_2 , определяемого экспериментально в следующем виде:

$$\varepsilon^t = \frac{\varepsilon_0^t - \varepsilon_1^t}{t_1 - t_2} t + \frac{\varepsilon_1^t t_1 - \varepsilon_0^t t_2}{t_1 - t_2}, \quad \varepsilon^z = \frac{\varepsilon_0^z - \varepsilon_1^z}{t_1 - t_2} t + \frac{\varepsilon_1^z t_1 - \varepsilon_0^z t_2}{t_1 - t_2}.$$

На этом этапе плотность распределения деформаций (с учётом равенства $\varepsilon^* = \varepsilon^t$) записывается в виде:

$$f(\varepsilon) = \frac{h_1}{\varepsilon_1^z - \varepsilon_1^t} (\varepsilon_1^t - \varepsilon), \quad \varepsilon_1^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1^z,$$

где $h_1 = 2/(\varepsilon_1^z - \varepsilon_1^t)$.

Пусть после некоторого числа циклов нагружения на втором этапе отрезок $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ стал равным $[0,005; 0,055]$. Соответствующая кривая деформирования показана на рис. 4 (кривая 5).

На третьем этапе циклирования отрезок $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ начинает сжиматься, то есть значение ε^t остаётся равным ε_1^t , а значение ε^z уменьшается от ε_1^z до ε_2^z .

По окончании третьего этапа отрезок $[0,005; 0,055]$ сжимается до отрезка $[0,0001; 0,03]$. Закономерность $\varepsilon^z(t)$ на данном этапе при изменении времени от t_2 до значения t_3 , определяемого экспериментально, имеет вид:

$$\varepsilon^z = \frac{\varepsilon_1^z - \varepsilon_1^t}{t_2 - t_3} t + \frac{\varepsilon_1^t t_2 - \varepsilon_1^z t_3}{t_1 - t_2}.$$

На этом этапе плотность распределения деформаций записывается в виде:

$$f(\varepsilon) = \frac{h_2}{\varepsilon_2^z - \varepsilon_1^t} (\varepsilon_2^z - \varepsilon), \quad \varepsilon_1^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2^z,$$

где $h_1 = 2/(\varepsilon_2^z - \varepsilon_1^t)$.

Соответствующая кривая деформирования показана на рис. 4 (кривая б). Ясно, что деградация свойств материала продолжается.

Итак, механизм деградации (вырождения статической полной диаграммы растяжения упругохрупкого материала) связан с изменением, во-первых, плотности вероятности распределения деформаций разрушения структурных элементов, во-вторых, с уменьшением величин этих деформаций в результате циклирования и, следовательно, величины и расположения отрезка, на котором задаётся функция плотности распределения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-96018).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гохфельд, Д. А. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторном нагружении / Д. А. Гохфельд, О. С. Саадаков. – М.: Машиностроение, 1984. – 256 с.
2. Новожилов, В. В. Микронапряжения в конструкционных материалах / В. В. Новожилов, Ю. И. Кадашев. – Л.: Машиностроение, 1990. – 223 с.
3. Радченко, В. П. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов / В. П. Радченко, Е. В. Небогина, М. В. Басов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2009. – № 9. – С. 55 – 65.
4. Стружанов, В. В. Модифицированная модель Мазинга / В. В. Стружанов, В. В. Башуров // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2007. – № 1 (11). – С. 29 – 39.
5. Стружанов, В. В. Определение инкрементальных модулей по результатам испытаний на растяжение с построением полной диаграммы / В. В. Стружанов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2008. – № 1(16). – С. 160 – 163.
6. Стружанов, В. В. Свойства разупрочняющихся материалов и определяющие соотношения при одноосном напряжённом состоянии / В. В. Стружанов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2007. – № 2 (15). – С. 69 – 78.