



Попов Э. И., Репин Ю. М.

E. I. Popov, Yu. M. Repin

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ МЕТАЛЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ОХЛАЖДАЮЩЕЙ СРЕДЕ

STEFAN TASK SOLUTION FOR METAL MOVING IN A COOLANT MEDIUM

Попов Эрколий Иванович – кандидат технических наук, ведущий инженер Уральского научно-исследовательского института метрологии (Россия, Екатеринбург). E-mail: popovei@uniim.ru.

Mr. Erkoily I. Popov – PhD in Engineering, Senior Project Engineer, the Urals Research Institute for Metrology (Russia, city of Yekaterinburg). E-mail: popovei@uniim.ru

Репин Юрий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент Уральского федерального университета (Россия, Екатеринбург). E-mail: yuri.repin@usu.ru.

Mr. Yuri M. Repin – PhD in Engineering, Assistant Professor, the Urals Research Institute for Metrology (Russia, city of Yekaterinburg). E-mail: yuri.repin@usu.ru.

Аннотация. Составляются уравнения и формулируются граничные условия для частного случая затвердевания жидкого металла в установившемся режиме непрерывного литья. Задача имеет осевую симметрию и решается в цилиндрических координатах.

Summary. To solve the task, we formulate equations and lay down boundary conditions for a particular case of liquid metal solidification at steady mode continuous casting. The problem has axial symmetry and is solved in cylindrical coordinates.

Ключевые слова: задача Стефана, затвердевание жидкого металла, непрерывное литьё, двухфазная зона.

Key words: Stefan problem, solidification of liquid metal, continuous casting, two-phase zone.

УДК 539.3; 621.74

Введение

Потребность в моделировании процесса затвердевания появилась из-за проблем, возникающих при непрерывном горизонтальном литье медных заготовок: как прутковых, так и трубных. Без осмысления физической стороны технологии такого литья трудно предсказать механические свойства отливки, объяснить происхождение дефектов, оценить влияние скорости литья, длины кристаллизатора, интенсивности первичного и вторичного охлаждения отливаемой заготовки. Уравнения теплопроводности для условий непрерывного литья присутствуют во многих публикациях для конкретных случаев [1; 2; 7], но их решение – температурные поля при различных краевых условиях – не приводятся и не анализируются.

Получается, что те или иные особенности технологии непрерывного литья не вытекают непосредственно из анализа решений этих уравнений. Поэтому мы считаем, что прежде, чем начать математическое моделирование процесса непрерывного литья для определения конструктивных особенностей разрабатываемой установки, новой технологии, учёта качества исходного сырья, полезно рассмотреть и проанализировать решение идеализированной задачи фазового перехода в металле, движущемся в охлаждающей среде.

Физическая модель

Остановимся на модельных представлениях объекта и процесса. Примем некоторые упрощения и допущения в физической модели и в описании процессов в затвердевающем металле.

1. Считаем, что для решения тепловой задачи достаточно учитывать температурную зависимость коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda(T)$ и удельной теплоёмкости $c = c(T)$. Не будем учитывать температурную зависимость плотности ρ ввиду слабого влияния на её величину температуры и, как следствие, малозаметное отражение этого на тепловых процессах в металле (см. рис. 1).

2. Скорости движения твёрдой и жидкой фаз металла по этой причине одинаковы. На самом деле расхождение в скоростях есть, и определяется оно разностью плотностей, поэтому скорость движения затвердевшего металла меньше скорости движения жидкого металла. При решении тепловой задачи мы эту разницу не учитываем. Поэтому остаётся неизменным и сечение движущегося металла при фазовом превращении.

3. Не учитываем в движущейся жидкой фазе конвективные явления. При моделировании горизонтального литья это приводит к осевой симметрии системы, исключает зависимость температуры от угла при записи уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах. В частности лунка жидкого металла всегда осесимметрична, хотя в случае горизонтального литья это не так. К этому же приводит неучёт температурной зависимости плотности.

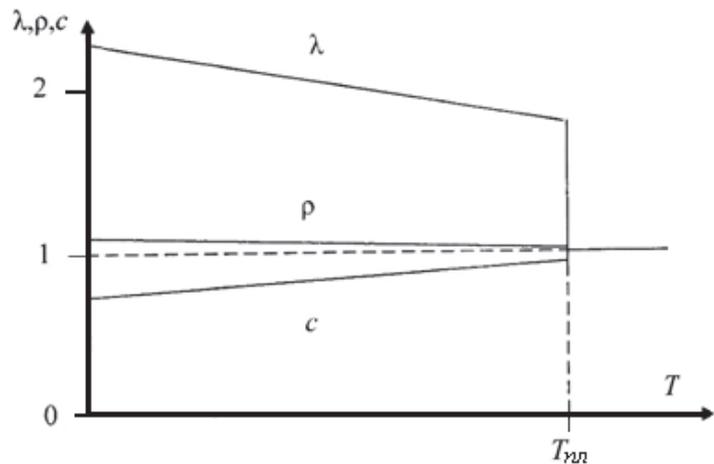


Рис. 1. Схематическое представление температурных зависимостей: коэффициента теплопроводности λ , удельной теплоемкости c и плотности ρ для меди. Для наглядности значения этих величин у жидкой меди приняты за единицу

4. Вводим искусственный температурный интервал в окрестностях температуры плавления: $T_{nl} \pm \Delta T$, появляется искусственная двухфазная зона с температурой ликвидуса $T_l = T_{nl} + \Delta T$ и температурой солидуса $T_s = T_{nl} - \Delta T$ шириной $2\Delta T$. Таким образом,

от классической постановки задачи Стефана, когда формулируются граничные условия на границе двух фаз, уходим. Правда, этот температурный интервал предполагаем узким. Описание такого «размазывания» границы фазового перехода приведено в книге [3]. В таком подходе нас оправдывает ещё и то, что этот узкий интервал одновременного и одноместного присутствия двух фаз всегда есть на практике из-за наличия примесей в металле. Допущение существования двухфазной зоны на шкале температур даёт возможность распространить эту методику нахождения границы фаз и на сплавы.

5. Упрощённо можно представить, что температурная зависимость коэффициента теплопроводности твёрдого металла носит линейный характер, а для жидкого металла есть величина постоянная для температур, не сильно превышающих температуру плавления. При температуре плавления имеет место скачок теплопроводности. В нашем представлении о наличии двухфазной зоны этот скачок величины коэффициента теплопроводности заменяется линейной зависимостью этого коэффициента от температуры в интервале от T_l до T_s

$$\lambda(T) = \lambda(T_s) - \frac{\lambda(T_s) - \lambda(T_l)}{T_l - T_s} (T - T_s),$$

изображенной на рис. 2, а.

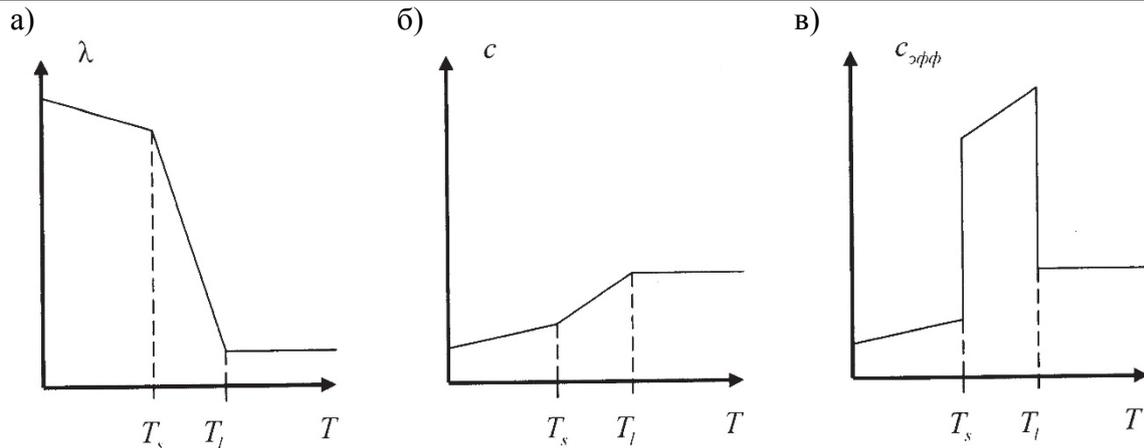


Рис. 2. Схемы температурных зависимостей в двухфазной зоне:

а – коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$; б – удельной теплоемкости $c(T)$;
в – эффективной теплоемкости $c_{эфф}(T)$

6. Аналогично вместо скачка удельной теплоёмкости при температуре плавления используем температурную зависимость $c(T)$ в двухфазной зоне

$$c(T) = c(T_s) + \frac{c(T_l) - c(T_s)}{T_l - T_s} (T - T_s).$$

Эта зависимость изображена на рис. 2, б.

7. Допустив существование двухфазной зоны между изотермическими поверхностями ликвидуса и солидуса, мы должны определиться с закономерностью выделения теплоты фазового перехода – этого скрытого источника тепла, существующего в интервале температур ликвидус-солидус. На эту тему в литературе существуют различные точки зрения [2; 5]. В упрощённом виде избранная квазиравновесная модель затвердевания такова, что выделение скрытой теплоты плавления носит постоянный (на градус) характер и определяется закономерностью перехода жидкой фазы в твёрдую [1]:

$$-\frac{d\Psi}{dT} = \frac{1}{T_l - T_s}.$$

Здесь Ψ – отношение объема твердой фазы к общему объему двухфазной области. В этом случае можно отождествить источник тепла с некой удельной теплоемкостью c^* .

$$c^* = \frac{L}{T_l - T_s}, \quad T_s \leq T \leq T_l,$$

где L – удельная теплота фазового перехода. Вне указанного температурного интервала $c^* = 0$. Таким образом, можно записать эффективную теплоемкость металла как функцию температуры:

$$c_{эфф}(T) = \begin{cases} c(T) = const & \text{при } T > T_l; \\ c(T) + \frac{L}{T_l - T_s} & \text{при } T_s \leq T \leq T_l; \\ c(T) & \text{при } T < T_s, \end{cases}$$

то есть $c_{эфф}(T) = c(T) + c^*$. Зависимость $c_{эфф}(T)$ в двухфазной зоне изображена на рис. 2, в.

Нужно заметить, что можно использовать и другие закономерности выделения тепла фазового перехода в двухфазной зоне. В нашем случае это только способ нахождения изотермической поверхности, образующей лунку жидкого металла.

8. Влияние внешней среды будем учитывать коэффициентом теплоотдачи. Коэффициент теплоотдачи в общем случае может являться функцией координаты, вдоль которой происходит движение металла.

Математическая модель

Математическая модель – это описание тепловых процессов в предложенной физической модели с помощью дифференциальных уравнений теплообмена: уравнений теплопроводности, движения, сплошности, теплоотдачи и условий однозначности (в терминологии авторов [3]).

Допущения, сделанные нами в физической модели, позволили обойтись в её математическом описании без уравнений движения, сплошности и теплоотдачи, то есть решать уравнение теплопроводности с условиями однозначности (краевыми условиями).

Составить уравнение теплопроводности для нашего случая не представляет особых трудностей, в литературе имеются похожие описания [2; 7]. Уравнение теплопроводности для движущегося с постоянной скоростью металла цилиндрической формы, в котором происходят фазовые превращения из-за охлаждающего воздействия окружающей среды, записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] - v \rho c_{эфф}(T) \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Здесь r и x – координаты в цилиндрической системе координат; v – скорость движения металла относительно окружающей среды.

Краевые условия: r изменяется в пределах от 0 до R , где R – это радиус цилиндра, x изменяется в пределах от 0 до такой величины, когда изменением температуры затвердевшего металла можно пренебречь.

В начале координат, при $x = 0$, температура жидкого металла постоянна, то есть $T(0, r) = T_{пл}$. При $r = R$ на поверхности цилиндра имеет место равенство

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} = [T(x, R) - T_{нар}(x)] \alpha(x).$$

Здесь $T(x, R)$ – температура на поверхности металла; $T_{нар}(x)$ – температура окружающей среды; $\alpha(x)$ – коэффициент теплоотдачи от металла к окружающей среде.

Для решения этой стационарной краевой задачи можно применить метод установления, сведя стационарную задачу к нестационарной, фиктивной. Для этого левую часть уравнения приравняем к производной от искомой функции по времени – по фиктивному времени τ .

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] - v \rho c_{эфф}(T) \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Эта фиктивная нестационарная задача используется только для построения разностной схемы одного из методов последовательного приближения, так называемого метода последовательной верхней релаксации [4].

Для выполнения расчётов в приведённом дифференциальном уравнении и краевых условиях производные приближённо заменяются разностными отношениями. Сетка узловых точек на плоскости (x, r) квадратная с шагом $\Delta x = \Delta r = h$.

Пусть $\Delta \tau$ – шаг по времени (фиктивному), тогда в левой части уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta \tau}.$$

Здесь k – номер очередной итерации; i – индекс вдоль координаты r ; j – индекс вдоль оси x .

Далее. Первое слагаемое правой части

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \approx \frac{1}{r_i h} \left[\frac{\lambda_{i+1,j} r_{i+1} + \lambda_{i,j} r_i}{2} \times \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h} - \frac{\lambda_{i,j} r_i + \lambda_{i-1,j} r_{i-1}}{2} \times \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h} \right] =$$

$$= \frac{1}{2h^2 r_i} \left[(\lambda_{i+1,j} r_{i+1} + \lambda_{i,j} r_i)(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (\lambda_{i,j} r_i + \lambda_{i-1,j} r_{i-1})(T_{i,j} - T_{i-1,j}) \right].$$

Аналогично - для второго слагаемого

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \approx \frac{1}{2h^2} \left[(\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j})(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1})(T_{i,j} - T_{i,j-1}) \right].$$

Суммируя две последние формулы, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda(T)r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \approx \frac{1}{2h^2} Q,$$

где

$$Q = \frac{1}{r_i} \left[(\lambda_{i+1,j} r_{i+1} + \lambda_{i,j} r_i)(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (\lambda_{i,j} r_i + \lambda_{i-1,j} r_{i-1})(T_{i,j} - T_{i-1,j}) \right] +$$

$$+ \left[(\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j})(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1})(T_{i,j} - T_{i,j-1}) \right].$$

Эффективная теплоёмкость – функция температуры, следовательно, третье слагаемое

$$\nu \rho c_{\text{эфф}}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \approx \nu \rho c_{\text{эфф},j} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h}.$$

В конечном итоге получаем формулу для итераций

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + \frac{\Delta \tau}{2h^2} [Q^k - h \nu \rho c_{\text{эфф},k}^k (T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k)].$$

Ход итерационного процесса определяется величиной $\frac{\Delta \tau}{h^2}$. Если она очень мала, то

процесс будет сходиться весьма медленно, но если она слишком велика, процесс будет расходиться. На основе некоторых предварительных теоретических рассмотрений и пробных решений величина $\frac{\Delta \tau}{h^2}$ была принята равной $\frac{0,3}{\lambda_c}$, где λ_c – константа, примерно равная среднему значению коэффициента теплопроводности металла в температурном диапазоне от жидкого состояния до твёрдого при температуре 0 °С.

Упомянутые предварительные теоретические рассмотрения опираются на эвристический принцип замороженных коэффициентов с учётом условия Куранта-Фридрихса-Леви. Кроме того, используются некоторые необходимые условия устойчивости предложенной схемы. Обоснованием правильности выбора как физической модели, так и вычислительной схемы является удовлетворительное соответствие результатов расчёта с практикой.

Для применения приведённой выше итерационной формулы следует определить порядок перебора узлов. Примем, что индекс j изменяется от меньших значений к большим, это соответствует переходу от меньших значений координаты x к большим, и при фиксированном значении j перебираем значения i от больших значений к меньшим (от больших значений r к меньшим), от поверхности внутрь. Отметим, что итерации выполняются по зейделевскому типу, таким образом, только что подсчитанные значения $T_{i,j}^{k+1}$ немедленно используются (вместе с ещё не пересчитанными значениями) для вычисления T^k в порядке перебора узлов, указанном выше.

Решение одного варианта на персональном компьютере может занимать несколько часов. Непосредственной целью решения является нахождение температуры металла в любой его точке. По ним строятся кривые зависимостей температуры на оси и поверхности



металла, изотермы, изображающие, в частности, границу между жидким и твёрдым металлом (лунку).

Решение задачи Стефана

Теплофизические характеристики меди и их температурные зависимости взяты из справочников и схематически изображены на рис. 1.

Температуру жидкой меди при $x = 0$ принимаем близкой к температуре плавления меди, $T_0 = 1100$ °С. Температура окружающей среды $T_{нар} = 0$ °С.

Рассматривались варианты с величиной диаметра $D = 2R = 0,01; 0,02$ и $0,035$ м, с коэффициентом теплоотдачи $1000; 3000$ и $5000 \frac{Вт}{м^2 К}$, диапазоном скоростей от 0 до 4 м/мин.

Некоторое расстояние от начала координат движение меди происходит в условиях полной тепловой изоляции от окружающей среды, температура по сечению меди остаётся близкой к её начальному значению. Протяжённость такого участка с нулевым значением коэффициента теплоотдачи конечна, и при $x \geq x_1 = 0,04$ м коэффициент теплоотдачи принимает значение $\alpha_1 = \text{const} > 0$.

По мере приближения к координате $x = x_1$ охлаждающее действие уже остывшей меди усиливается, плоские температурные фронты в жидкой меди начинают искривляться. При малых скоростях движения осевая теплопроводность может привести к началу и даже завершению процесса фазового перехода до подхода к $x = x_1$.

Нас интересует процесс фазового перехода, который начинается и заканчивается при наличии радиального теплоотвода, характеризующегося коэффициентом теплоотдачи $\alpha = \text{const}$. Величины $x_1 = 0,04$ м и $T_0 = 1100$ °С позволяют изучать этот процесс для выбранного нами диапазона скоростей, диаметров и коэффициентов теплоотдачи, ставя все возможные варианты их сочетаний примерно в равные условия начала фазового перехода вблизи координаты $x = x_1$.

Результаты расчётов представлялись в виде зависимостей температуры на поверхности и оси цилиндра по мере продвижения металла вдоль координаты x . На рис. 3 приведён ход такой температурной кривой для $R = 0,01$ м, $v = 1$ м/мин и $\alpha = 3000 \frac{Вт}{м^2 К}$.

Снижение температуры жидкой меди за счёт осевой теплопроводности начинается при $x < 0,04$ м. Поверхностное охлаждение снижает температуру жидкого металла достаточно медленно из-за выделения скрытой теплоты затвердевания. На оси это замедление более ярко выражено, чем на поверхности. Именно такой характерный для всех случаев вид температурных кривых на участке затвердевания обусловлен выделением скрытой теплоты фазового перехода, компенсирующей отвод тепла в окружающую среду.

После завершения процесса затвердевания снижение температуры ускоряется, следуя экспоненциальному закону, температурные кривые для поверхности и оси сближаются, практически сливаясь при больших x .

Для этого конкретного случая температура 1084 °С на поверхности цилиндра наступает при $x = 0,0416$ м. Это начало затвердевания. Окончание затвердевания меди на оси цилиндра происходит при координате $x = 0,0988$ м, соответственно глубина лунки жидкого металла $H = 0,0572$ м, а время прохождения лунки (длительность процесса выделения скрытой теплоты или длительность фазового перехода) $t = 3,43$ с.

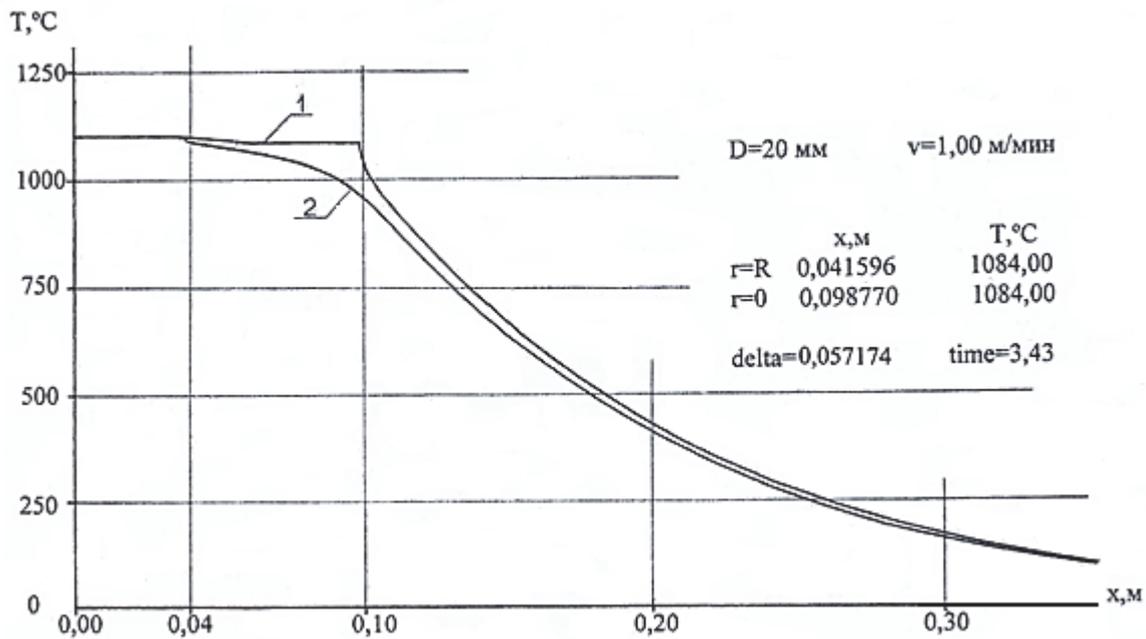


Рис. 3. Температура на оси (1) и поверхности (2) медного цилиндра для $R = 0,01$ м, $v = 1$ м/мин, $\alpha = 3000$ Вт/(м²·К)

Получены изображения изотермических поверхностей в продольном сечении цилиндра, в частности, для температуры фазового перехода. Семейство таких изотерм (профилей лунок) для различных скоростей движения приведено на рис. 4. Масштабы по осям одинаковы.

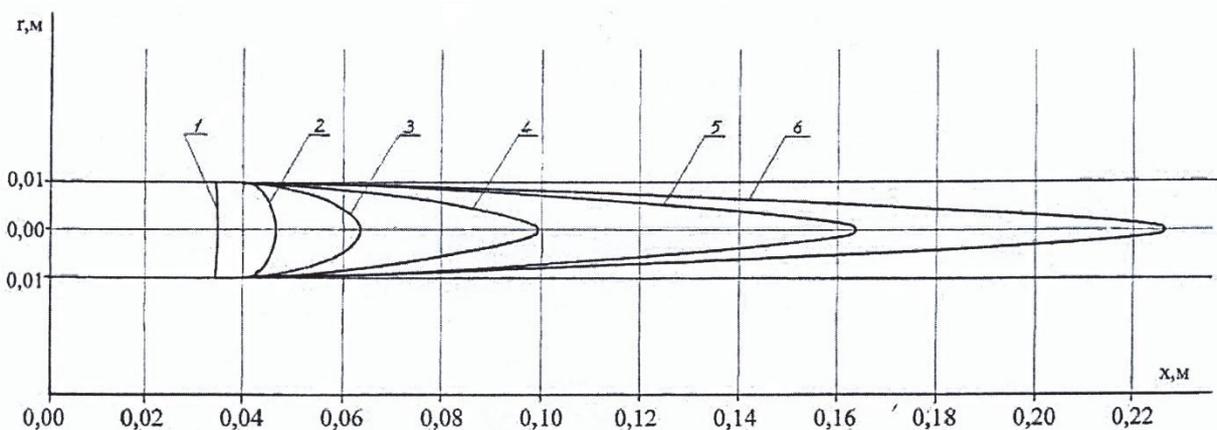


Рис. 4. Семейство изотерм 1084 °С для $R = 0,01$ м, $\alpha = 3000$ Вт/(м²·К) и скоростей движения v , м/мин: 1 – 0,2; 2 – 0,3; 3 – 0,5; 4 – 1,0; 5 – 2,0; 6 – 3,0

При низких скоростях движения процесс затвердевания происходит в условиях $\alpha = 0$. С увеличением скорости лунка жидкого металла целиком выходит в зону радиального отвода тепла с $\alpha = \alpha_1$, вытягивается, глубина её растёт, форма становится конусообразной.

Будем описывать процесс затвердевания через параметры: глубина лунки H и время t от начала затвердевания на поверхности до окончания затвердевания металла на оси. Отметим очень важную особенность – все точки зависимости глубины лунки от скорости движения (в области $\alpha = \alpha_1$) ложатся на прямую линию

$$H = kv - H_0,$$

где k – тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс, на которой отложены значения скоростей, поэтому k имеет размерность времени; H_0 – отрезок на оси ординат, получающийся при продолжении полученной прямой до $v = 0$ (см. рис. 5).

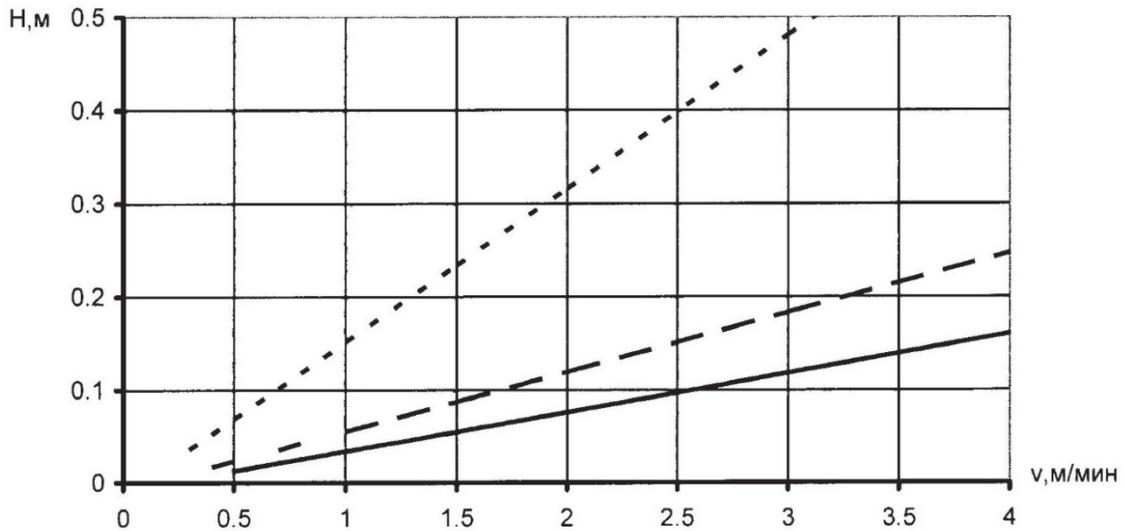


Рис.5. Зависимость глубины лунки H от скорости движения металла v для $R=0.01$ м и различных коэффициентов теплоотдачи $\alpha, \frac{Вт}{м^2 К}$:
 (---) – 1000; (- -) – 3000; (—) – 5000

Зависимость длительности фазового перехода от скорости движения имеет вид кривой, сначала быстро растущей, затем замедляющей свой рост, асимптотически приближающейся к некоторому пределу. Этим пределом является коэффициент $k, k = t_{max}$. Это означает, что при больших скоростях величины H и v связаны соотношением $H = kv$, а длительность процесса затвердевания становится постоянной величиной (см. рис. 6).

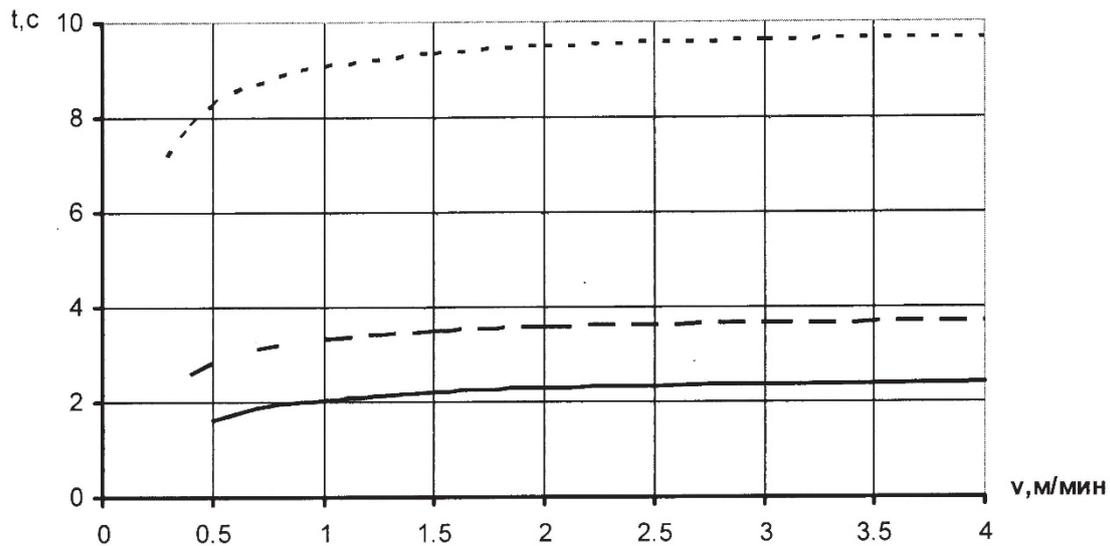


Рис.6. Длительность фазового перехода t как функция скорости движения металла v для $R=0.01$ м и различных значений коэффициентов теплоотдачи $\alpha, \frac{Вт}{м^2 К}$: (---) – 1000; (- -) – 3000; (—) – 5000

Такие пары зависимостей: $H = H(v)$ и $t = t(v)$ приведены на рис. 5 и 6 для некоторых вариантов исходных данных задачи. Величины k для всех вариантов сведены в табл. 1.

Таблица 1

Величина коэффициента $k = t_{\max}$, с, для различных вариантов исходных данных

$\alpha, \frac{Bm}{m^2K}$	$R, \text{ м}$		
	0,005	0,010	0,0175
1000	4,36	9,88	18,66
3000	1,80	3,83	7,78
5000	1,15	2,52	5,25

Величина k – очень важная характеристика описываемого процесса, она не только является собой предел длительности фазового перехода, служит оценкой интенсивности образования лунки, но и является основным показателем такой практически важной характеристики процесса затвердевания, как скорость.

Рассмотрим вопрос о скорости затвердевания жидкого металла в описываемых условиях. Объём затвердевшего металла в единицу времени равен произведению скорости движения на площадь поперечного сечения цилиндра, πR^2 . При малых скоростях движения, малых радиусах цилиндра и больших величинах α , когда лунка имеет незначительную глубину ($H \ll R$) скорость затвердевания V_3 практически совпадает со скоростью движения, $V_3 = v$. Увеличение скорости движения приводит к росту глубины лунки и её поверхности, на которой совершается процесс фазового перехода. На большей поверхности лунки скорость перехода меди из жидкого состояния в твёрдое замедляется. Для среднего значения V_3 справедливо выражение

$$\pi R^2 v = S_n V_{3, \text{cp}},$$

где S_n – площадь поверхности лунки; $V_{3, \text{cp}}$ – среднее по её поверхности значение скорости затвердевания (средняя скорость роста корочки твёрдого металла).

Если представлять лунку в виде конуса, то площадь его боковой поверхности

$$S_n = \pi R \sqrt{R^2 + H^2},$$

а средняя скорость затвердевания

$$V_{3, \text{cp}} = \frac{Rv}{\sqrt{R^2 + H^2}}.$$

Рассчитанные значения средней скорости затвердевания для некоторых вариантов исходных данных задачи как функции скорости движения представлены на рис. 7.

Отметим особенности такой зависимости. При малых скоростях, как уже отмечалось, имеет место совпадение скорости движения и скорости затвердевания, затем следует замедление роста скорости затвердевания, и при дальнейшем увеличении v кривые проходят через максимум, а при $v \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к некоторому значению, ниже которого не опускаются. Для больших скоростей движения $H \gg R$, лунка становится по форме очень близкой к конусу, а скорость затвердевания перестаёт зависеть от v .

$$V_3 = \frac{vR}{H} = \frac{R}{k}, \text{ м/с.}$$

Предельные значения скорости затвердевания для всех вариантов исходных данных при $v \rightarrow \infty$ приведены в табл. 2.

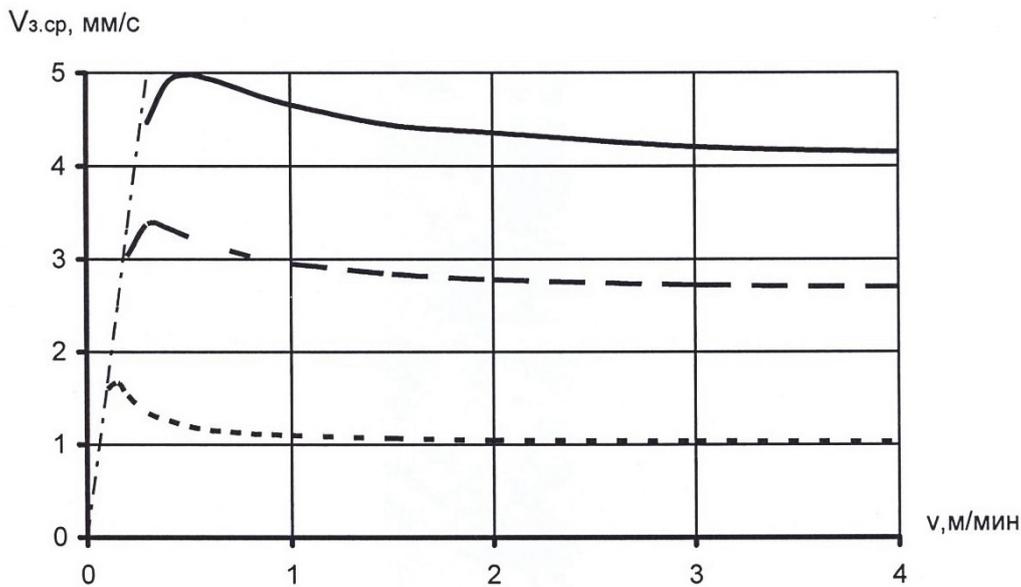


Рис.7. Зависимость средней скорости затвердевания металла $V_{z,sp}$ от скорости движения v для $R=0,01$ м и различных коэффициентов теплоотдачи $\alpha, \frac{Вт}{м^2К}$:
 (- - -) – 1000; (— —) – 3000; (—) – 5000; (— · —) – $V_{z,sp} = v$

Таблица 2

Предельные значения скорости затвердевания V_z , мм/с, при $v \rightarrow \infty$ для различных вариантов исходных данных

$\alpha, \frac{Вт}{м^2К}$	$R, м$		
	0,005	0,010	0,0175
1000	1,15	1,01	0,94
3000	2,78	2,61	2,25
5000	4,34	3,97	3,33

Данные этой таблицы получаются простым делением величины радиуса на величину k в соответствующей ячейке табл. 1.

Для каждой точки поверхности лунки (см. рис.4) скорость затвердевания равна проекции скорости движения на нормаль к поверхности, поэтому $V_z = v \cdot \sin \beta$, где β – угол между направлением движения и касательной к поверхности. Для $r = R$ этот угол минимален, и вместе с ним минимальна величина скорости затвердевания. Для $r = 0$ угол $\beta = 90^\circ$, и скорость затвердевания равна скорости движения металла.

При малых скоростях движения, когда $H \ll R$, фронт затвердевания плоский, и для всех его точек $V_z = v$.

При больших скоростях, когда $H \gg R$, лунка превращается в конус, у которого β – это половина угла при его вершине. Для всех значений r скорость затвердевания неизменна и равна R/k , кроме вершины конуса, эта особая точка затвердевает со скоростью движения металла.

В заключение отметим, что «размазывание» границы фазового перехода вместо задания граничных условий себя полностью оправдало. Очевидное удобство такого подхода и его перспективность не сопровождаются сколько-нибудь существенной потерей точности



расчётов при определении изотермической поверхности 1084 °С, чего следовало ожидать в связи с уменьшением ΔT . Уменьшение ΔT с 8 °С до 2 °С приводит к увеличению глубины лунки и длительности фазового перехода всего на 0,3 % для варианта с $v = 1$ м/мин, изображённом на рис. 4.

Выводы

1. Обнаруженные закономерности затвердевания металла, движущегося в охлаждающей среде, вместо временных зависимостей для описания нестационарного процесса («закон квадратного корня») потребовали использования зависимостей от скорости движения металла таких величин, как глубина образующейся лунки, длительность фазового перехода, скорость затвердевания («роста корочки твёрдой фазы»), характеризующих стационарный процесс.

2. Глубина лунки растёт линейно со скоростью движения металла. При больших скоростях движения лунка вырождается в конус.

3. Длительность фазового перехода незначительно увеличивается вместе со скоростью движения металла и при больших скоростях становится величиной постоянной.

4. Скорость затвердевания металла имеет максимум при некоторой величине скорости движения, в дальнейшем, снижаясь, перестаёт зависеть от неё, также становясь величиной постоянной.

5. Вид этих зависимостей позволяет объяснить многие странные, на первый взгляд, эффекты из практики непрерывного литья: качество отливки непонятным образом зависит от скорости литья и длины кристаллизатора, прочность бездефектной литой заготовки имеет максимум в области достаточно низких скоростей литья и другие. Но это уже не тема данной статьи.

6. Моделирование работы конструируемой установки непрерывного литья можно производить, решая приведённую в статье задачу, меняя лишь её граничные условия: температуру расплава и окружающей среды, используя коэффициент теплопередачи вместо коэффициента теплоотдачи, сделав его функцией координаты, и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буланов, Л. В. Машины непрерывного литья заготовок / Л. В. Буланов, Л. Г. Корзунин [и др.]. – Екатеринбург: Уральский центр ПР и рекламы – «Марат», 2003. – С. 13-24.
2. Кац, А. М. Теплофизические основы непрерывного литья слитков цветных металлов и сплавов / А. М. Кац, Е. Г. Шадек – М.: Металлургия. 1983 – С. 17-23.
3. Михеев, М. А. Основы теплопередачи / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский – М.: Наука, 1977. – С. 550-632.
5. Севастьянов, Г. М. Об одном способе расчёта границы фронта кристаллизации в расплаве стали / Г. М. Севастьянов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2011. – № II-1(6). – С. 76-80.
6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука. 1977. – С. 259-264.
7. Цаплин, А. И. Теплофизика в металлургии / А. И. Цаплин. – Пермь: Изд-во Пермского гос. техн. ун-та, 2008. – 230 с.