

Абашкин Е. Е., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРИВЕДЁННЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КАЧЕСТВЕ СРЕДСТВА РАСЧЁТОВ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОСКИХ НАПРЯЖЁННЫХ СОСТОЯНИЙ

Абашкин Е. Е., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А.
Ye. Ye. Abashkin, A. V. Tkacheva, G. A. Shcherbatyuk

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРИВЕДЁННЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КАЧЕСТВЕ СРЕДСТВА РАСЧЁТОВ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОСКИХ НАПРЯЖЁННЫХ СОСТОЯНИЙ

CONDITION OF PLASTICITY OF MAXIMUM SPECIFIC CURRENT STRESSES AS A MEANS OF EVOLUTION CALCULATIONS OF PLANE STRESSED STATES

Абашкин Евгений Евгеньевич – младший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. E-mail: abashkine@mail.ru.

Mr. Yevgeny Ye. Abashkin – Junior researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists str. E-mail: abashkine@mail.ru.

Ткачева Анастасия Валерьевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. E-mail: 4nansi4@mail.ru.

Ms. Anastasiya V. Tkacheva – PhD in Physics and Mathematics, Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists str. E-mail: 4nansi4@mail.ru.

Щербатюк Галина Анатольевна – старший преподаватель Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: vvv160278@mail.ru.

Mrs. Galina A. Shcherbatyuk – senior lecturer of Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: vvv160278@mail.ru.

Аннотация. На примере одномерной задачи о локальном прямолинейном симметричном нагреве бесконечной пластины с жёстко закреплёнными краями по ширине указан способ расчёта температурных напряжений. Обращается внимание на такое обстоятельство, что данная задача при использовании пластического условия пластичности максимальных касательных напряжений (условия Треска – Сен-Венана) не имеет решения из-за некорректности в её постановочной части. Однако при использовании также кусочно-линейного условия пластичности максимальных приведённых касательных напряжений (условия Ишлинского – Ивлева) подобной некорректности удаётся избежать. Полученное решение предполагается использовать в расчётах температурных напряжений в пластине, включая остаточные, в зоне термического влияния сварного шва.

Summary. On the example of a one-dimensional problem of local rectilinear symmetrical heating of an infinite plate with rigidly fixed edges along the width, a method of calculating temperature stresses is indicated. Attention is drawn to such a circumstance that the given problem, when using the plastic plasticity condition for maximum shear stresses (Treska – Saint-Venant conditions), has no solution due to incorrectness in its staging part. However, when using also the piecewise linear condition for the plasticity of the maximum reduced stresses (Ishlinskii – Ivlev conditions), such an incorrectness can be avoided. The constructed solution is supposed to be used in calculating the temperature stresses in the plate, including residual ones, in the zone of thermal influence of the welded seam.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, плоское напряжённое состояние, остаточные напряжения.

Key words: elasticity, plasticity, temperature stress, planar stressed state, residual stress.



УДК 539.374

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Введение

Успехи в развитии теории пластического течения в прошлом веке во многом определялись использованием кусочно-линейных условий пластичности [6; 9; 14]. Именно на таком подходе основаны современные методики расчётов большинства технологических операций обработки металлов давлением (штамповка, прокатка, волочение, обтяжка и др.). Значимые упрощения в математический аппарат вносит использование их и в теории температурных напряжений [1-3; 5; 16-21]. Особенно последнее касается случая неустановившихся температурных напряжений, когда поле напряжений меняется со временем и формирует поля остаточных напряжений и деформаций в теле. Формирование остаточных напряжений может быть полезно, как, например, в сборке с натягом за счёт горячей посадки, но может отрицательно влиять на эксплуатационные характеристики конструкций, как это происходит при сборке сваркой. В таком случае приходится назначать специальные операции по понижению уровня остаточных напряжений [10] в окрестности сварочного шва. Данная околошовная область собираемой металлоконструкции, называемая зоной термического влияния, оказывается тем местом, где существенно снижается прочностной потенциал материала. В материаловедении это обстоятельство связывают со структурными изменениями в металле, диктуемыми твердотельными фазовыми превращениями. Описание подобных эффектов выходит за рамки классической механики деформируемых тел, однако получить косвенные сведения об уровне возникающих в процессе напряжений и необратимых деформаций возможно даже не выходя за рамки классических теорий. С точки зрения последних [7] структурные превращения, возникающие в деформируемом теле за счёт интенсивного термомеханического воздействия на него, приводят к новым состояниям минимума термодинамических потенциалов (свободная энергия, внутренняя энергия, потенциал Гиббса), задающим новые состояния термодинамического равновесия и изменения в упругих модулях и пределе текучести. Таким способом даже классические теории деформируемых тел отчасти могут отслеживать изменения в прочностных и деформационных свойствах металлов, претерпевающих твердотельные фазовые превращения. Наиболее простым данный способ учёта структурных изменений оказывается в теории температурных напряжений, когда связанностью тепловых и деформационных процессов пренебрегают, считая, что производство тепла за счёт деформирования, включая необратимое, мало в процессе настолько, что его можно без существенного ущерба не учитывать.

Оценивая размеры зоны термического влияния и уровень остаточных напряжений в окрестности сварного шва, Н. Н. Рыкалин ещё в середине прошлого века заметил [13], что основным механизмом, формирующим зону термического влияния, является необратимое (пластическое) деформирование в условиях интенсивного теплового воздействия. Именно рост необратимых деформаций задаёт итоговое распределение остаточных напряжений, которые оказываются индикатором произошедших фазовых изменений в основном металле околошовной области. Поэтому восстановление прочностного ресурса металла связывают главным образом с понижением уровня остаточных напряжений, а потому назначают для этого специальные технологические операции [10]. Следовательно, уровень и распределение остаточных напряжений в окрестности сварного шва оказываются значимой характеристикой качества сварного соединения. Возможность иметь оценки для таких напряжений приобретает исключительно важное значение, тем более, если такие оценки представляются средствами математического моделирования, то есть наименее затратными средствами.

Здесь построим аналитическое (по существу) решение задачи локального нагрева бесконечной пластины по прямой, являющейся осью симметрии в её конечном размере по ширине. Построение проведём в рамках теории температурных напряжений, учитывая при этом зависимость предела текучести и упругих модулей от температуры. Именно таким способом [7], оставаясь в рамках классической теории температурных напряжений в упругопластических телах, оценим

итоговое изменение упругих постоянных за счёт структурных изменений в материале и рассчитаем остаточные деформации и напряжения в зоне термического влияния. Рассматриваемая модельная одномерная задача является простейшей, но, несмотря на её важность для приложений в моделировании процесса сварки, она не получила своего решения до настоящего времени. Объясним данное обстоятельство тем, что с использованием классического кусочно-линейного условия пластичности максимальных касательных напряжений (условие Треска – Сен-Венана) постановка такой задачи оказывается некорректной, а при условии максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса) с необходимостью приходим к организации приближённых численных вычислений с дискретизацией расчётной области пластического течения. И только в случае использования условия пластичности максимальных приведённых касательных напряжений (условия Ишлинского – Ивлева), которое, оставаясь одним из трёх классических условий пластического течения, используется сравнительно более редко, удаётся получить аналитическое решение.

Основные модельные зависимости

Рассмотрим упругопластическое тело деформации e_{ij} , в котором деформации считаем малыми и складываемыми из упругой e_{ij}^e и пластической e_{ij}^p :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений, а индексами после запятой обозначены частные производные по соответствующей пространственной координате.

При записи формулы (1) и в дальнейшем используется прямоугольная декартова система координат. Обратимые (упругие) деформации и температура T задают напряжения в теле согласно зависимостям закона Дюамеля – Неймана:

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K(T - T_0))\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (2)$$

где λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули материала тела, α – коэффициент линейного расширения.

Необратимые (пластические) деформации накапливаются в теле при условии достижения напряжениями поверхности $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ в пространстве напряжений, где k – предел текучести материала тела. В идеальной пластичности принимаются условия принципа максимума Мизеса, тогда следуют соотношения ассоциированного закона пластического течения:

$$de_{ij}^e = d\varphi \frac{\partial f(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}}; \quad d\varphi > 0. \quad (3)$$

Классические условия пластического течения (поверхности нагружения) следующие:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k, \quad (4)$$

$$\max |\sigma_i - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad (5)$$

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij} \right) = \frac{8}{3}k^2. \quad (6)$$

Условие пластичности (4) называется условием пластичности максимальных касательных напряжений, или условием пластичности Треска – Сен-Венана [6]. В пространстве главных напряжений σ_i оно представляет собой поверхность наклонной призмы (призмы Треска). Обра-

зующие данной поверхности одинаково наклонены с гидростатической осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, а в сечении призмы Треска с девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ имеет шестиугольник, вписанный в окружность радиуса $2k$ (см. рис.1). Условие пластичности (5) называют [6; 9] условием пластичности максимальных приведённых касательных напряжений. Иногда его называют также условием пластичности Ишлинского – Ивлева, а соответствующую ему наклонную призму в пространстве главных напряжений называют призмой Ивлева. Сечением призмы Ивлева с девиаторной плоскостью является шестиугольник, описанный относительно окружности радиусом $2k$ (см. рис. 1). Наконец, последнее (6) из классических условий идеальной пластичности называется условием Мизеса. Сечение цилиндрической поверхности (наклонного цилиндра Мизеса), иллюстрирующее данное условие пластичности в пространстве главных напряжений, с девиаторной плоскостью оказывается как раз окружностью радиуса $2k$. В изотермической идеальной пластичности k является главной постоянной теории.

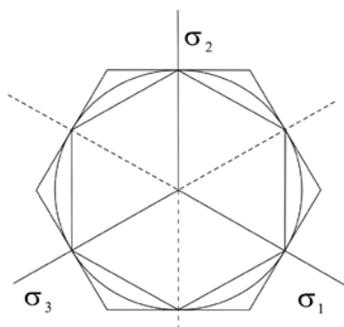


Рис. 1. Поверхности нагружения

Когда деформирование является принципиально неизотермическим, что характерно для технологий, определяемых интенсивным термомеханическим воздействием на деформируемые материалы, тогда предел текучести и упругие модули считают зависящими от температуры. Далее такие зависимости принимаются в форме [11; 15].

$$\begin{aligned}
 E(\theta) &= E_p - (E_p - E_0)\tau(\theta), \\
 \nu(\theta) &= \nu_p - (\nu_p - \nu_0)\tau(\theta), \\
 k(\theta) &= k_0\tau(\theta)^2, \quad \tau(\theta) = T_0(T_p - T_0)^{-1}\theta.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Согласно (7) для модуля Юнга $E(\theta)$ и коэффициента Пуассона $\nu(\theta)$ приняты простейшие их линейные зависимости от безразмерной температуры θ , а для предела текучести $k(\theta)$ – квадратичная зависимость от θ .

В (7) также введены обозначения: E_0 , ν_0 , k_0 – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и предел текучести при комнатной (T_0) температуре; E_p и ν_p – значения упругих модулей при температуре, приближающейся к температуре плавления T_p .

Упругие модули $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ и $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ зависят от коэффициентов Пуассона и модуля Юнга.

Считаем также, что при комнатной температуре упругопластическое тело при отсутствии внешних нагрузок находится в свободном состоянии, то есть деформации и напряжения в нём отсутствуют.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную пластину шириной $2s$. Систему координат свяжем с краем пластины так, чтобы координаты изменились в пределах $0 \leq x \leq 2s$; $-\infty < y < \infty$. С целью упрощения дальнейшего будем считать, что локальный нагрев осуществляется по прямой линии $x = s$. Полагаем, что нагревание происходит с постоянной скоростью так, чтобы

$$T|_{x=s} = vt. \quad (8)$$

Исходя из принятой геометрии для пластины и условий её нагрева (8), получаем одномерную задачу теплопроводности с уравнением

$$T_{,t} = aT_{,xx} - \psi(T - T_0). \quad (9)$$

В (8) и (9) a – коэффициент температуропроводности, v – скорость роста температуры за счёт подвода тепла, ψ – коэффициент теплоотдачи с поверхности пластины в окружающую среду. Последний определяется тепловыми свойствами материала пластины, её толщиной и теплоотводящими свойствами окружающей среды. Далее будем считать его постоянным. Сформулируем краевую задачу для уравнения теплопроводности в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \theta_{,\xi} &= b\theta_{,\eta\eta} - \theta, \\ \theta_{,\eta}|_{\eta=0} &= 0; \quad \theta|_{\eta=1} = \frac{V}{T_0\psi}\xi - 1, \\ \xi &= \psi t; \quad \eta = \frac{x}{s}; \quad b = \frac{a}{s^2\psi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое из краевых условий (10) означает, что теплоотводом от кромки пластины в окружающую среду можно пренебречь. Для краевой задачи (10) можно записать аналитическое решение [12]. Удобнее (так как механическая задача решается численно) включить в численный алгоритм расчётов и расчёты по конечно-разностному аналогу задачи (10). Из-за симметричного относительно прямой $x = s$ распределения температуры рассматривается только её левая часть $0 \leq x \leq s$.

С началом нагрева материал пластины деформируется обратимо (термоупруго). Для напряжений, исходя из (2) в условиях предполагаемого плоского напряжённого состояния ($\sigma_z = 0$), найдём

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{,xx} - 6\alpha\mu KT_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda u_{,xx} - 6\alpha\mu KT_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрируя уравнение равновесия $\sigma_{x,x} = 0$, получим распределение перемещений по пластине в любой рассматриваемый момент времени:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{3\alpha T_0}{2} \int_0^x \theta(\rho) K(\rho) \gamma_1(\rho) d\rho + \frac{C_1}{4} \int_0^x \gamma_1(\rho) \gamma_2(\rho) \mu(\rho)^{-1} d\rho + C_2, \\ \gamma_1(\rho) &= (\lambda(\rho) + \mu(\rho))^{-1}; \quad \gamma_2(\rho) = (\lambda(\rho) + 2\mu(\rho)). \end{aligned} \quad (12)$$

В формуле (12) постоянные интегрирования C_1 и C_2 в общем случае являются функциями температуры и, следовательно, времени. Называя их постоянными, подразумевается только, что они не зависят от пространственной координаты. Для их определения в каждый момент времени следует

воспользоваться граничными условиями. Полагаем, что грани пластины $x = 0$ и $x = 2s$ закреплены, тогда

$$u_x|_{x=0} = 0; \quad u_x|_{x=s} = 0; \quad u_x|_{x=2s} = 0. \quad (13)$$

В силу симметрии задачи здесь, как и в (10), рассматривается лишь одна половина пластины. Подставляя (12) в (13), находим:

$$C_1 = -\frac{6\alpha T_0 \int_0^s \theta(\rho) K(\rho) \gamma_1(\rho) d\rho}{\int_0^s \mu(\rho)^{-1} \gamma_1(\rho) \gamma_2(\rho) d\rho}; \quad C_2 = 0. \quad (14)$$

Распределения напряжений по пластине следуют из уравнения равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ и соотношений (11) и (14):

$$\sigma_x = C_1; \quad \sigma_y = \left(\frac{\lambda}{2} C_1 - 3\alpha \mu K T_0 \theta \right) (\lambda + \mu)^{-1}; \quad \sigma_z = 0. \quad (15)$$

При нагревании напряжения по абсолютной величине растут и в итоге могут достичь одной из поверхностей нагружения (4)–(6). Но поверхностей нагружения (условий пластичности) не может быть несколько, возможна только одна. Какую из них следует выбрать?

Пластическое течение в условиях нагревания

Условие пластичности Мизеса (6) с необходимостью приведёт к численным расчётам деформаций и напряжений с дискретизацией области пластического течения. В [5, 8] было показано, что расчёты изменяющихся температурных напряжений возможно провести без обращения к численным процедурам, связанным с дискретизации расчётной области пластического течения. Это возможно, если использовать кусочно-линейные условия пластичности (4), (5). Данное обстоятельство позволяет не только упростить алгоритмы и программы расчётов, но и вследствие этого провести более качественный анализ результатов расчётов и их следствий.

При выборе условий пластичности Мизеса (6) неизбежно следует озаботиться как точностью расчётов в области с неизвестными продвигающимися границами, так и вопросами сходимости и устойчивости конечно-разностных схем расчётов. Поэтому предпочтение следует отдать именно кусочно-линейным пластическим потенциалам (4) и (5).

На рис. 2 показаны линии, представляющие условия пластичности (4)–(6) в условиях плоского напряжённого состояния ($\sigma_z = 0$) на координатной плоскости главных напряжений σ_x и σ_y .

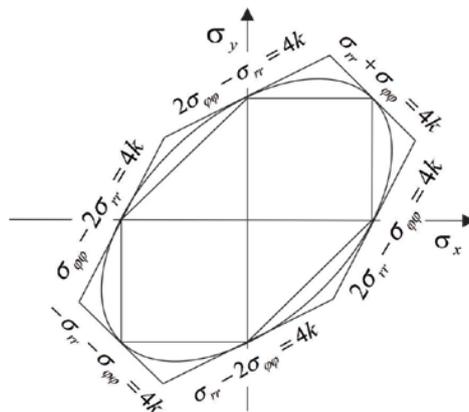


Рис. 2. Поверхности нагружения для плоского напряжённого деформирования

Замкнутой кривой линией является представление условия пластического течения Мизеса, вписанной кусочно-линейной – условие Треска – Сен-Венана, описанной – условие Ишлинского – Ивлева.

От использования в расчётах условия максимальных касательных напряжений (4) придется отказаться по другой причине. В таком случае построить решение рассматриваемой задачи оказывается невозможным. Действительно, при росте температуры со временем условие пластичности Треска – Сен-Венана выполняется в следующей форме: $\sigma_x = 2k(x)$. Зависимость предела текучести от пространственной координаты задаётся зависимостью температуры $\theta(x)$ от этой координаты. Но из уравнения равновесия следует, что $\sigma_{x,x} = 0$, то есть σ_x не зависит от этой координаты. Полученное противоречие исключает случай использования в качестве условия пластичности критерия Треска – Сен-Венана (4).

Таким образом, наиболее приемлемыми для целей настоящей заметки оказываются условия максимальных приведённых касательных напряжений (5) (критерий Ишлинского – Ивлева). С ростом температуры пластины на линии симметрии $x = s$ выполнится условие $2\sigma_y - \sigma_x = -4k$; здесь зарождается пластическое течение. Упругопластическая граница $x = n(t)$ движется к границе пластины $x = 0$; другая такая же граница движется в сторону другого края пластины – $x = 2s$. Из-за симметрии рассматриваем лишь левую часть пластической области $n(t) \leq x \leq s$. Для напряжений в этой области согласно (2) имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left(4\mu(\lambda + \mu)(u_{x,x} - e_x^p) - 2\lambda\mu e_y^p - 6\alpha\mu K T_0 \theta\right)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= \left(2\mu\lambda(u_{x,x} - e_x^p) - 4\mu(\lambda + \mu)e_y^p - 6\alpha\mu K T_0 \theta\right)(\lambda + 2\mu)^{-1}.\end{aligned}\quad (16)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения (3) и условию пластической несжимаемости, получаем:

$$e_x^p = -\frac{1}{2}e_y^p = -\frac{1}{2}e_z^p = \left(u_{x,x} - \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu}k + 1.5K\alpha T_0 \theta\right)(3\lambda + 5\mu)^{-1}.\quad (17)$$

Так как в данном случае уравнение равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ имеет тривиальное решение $\sigma_x = C_1$, окончательное решение задачи запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = 0.5C_1 - 2k, \\ u_x &= C_1 \int_{n_1(t)}^x \frac{3\lambda(\rho) + 5\mu(\rho)}{12K(\rho)\mu(\rho)} d\rho + \frac{3}{2}\alpha T_0 \int_{n_1(t)}^x \theta(\rho) d\rho - \int_{n_1(t)}^x \frac{k(\rho)}{3K(\rho)} d\rho + C_3, \\ -0.5e_y^p &= e_z^p = e_x^p = \frac{C_1}{12K} + \frac{1}{2}\alpha T_0 \theta - \frac{\lambda + \mu}{3K\mu}k.\end{aligned}\quad (18)$$

С дальнейшим ростом температуры пластины на линии нагрева пластины $x = s$ наряду с ранее выполненным условием пластичности выполнится ещё одно условие: $\sigma_x + \sigma_y = -4k$. Таким способом выполняются условия ребра призмы Ивлева, или (что то же самое) напряжённое состояние в рассматриваемом случае оказывается соответствующим точке пересечения прямых $2\sigma_y - \sigma_x = -4k$ и $\sigma_x + \sigma_y = -4k$ (см. рис. 2). Пластическое течение в соответствии напряжений ребру призмы Треска названо М. Леви [9] состоянием полной пластичности. В теории температурных напряжений состояния полной пластичности также возможны, например, в задачах горячей посадки [5]. Однако в рассматриваемом случае пластическое течение в соответствии напряжений ребру

призмы Ивлева невозможно. Действительно, в этом случае уравнение равновесия заставляет считать σ_x не зависящим от пространственной координаты x , но из условия пластичности следует,

что $\sigma_x = -\frac{4k}{3}$. Так как k – есть функция температуры, то предел текучести с необходимостью за-

висит от её распределения, то есть от x . Следовательно, в тот момент времени, когда при $x = s$ выполняется условие $\sigma_x + \sigma_y = -4k$, происходит смена режимов пластического течения.

Не задерживаясь на ребре поверхности нагружения, напряжения переходят с грани $2\sigma_y - \sigma_x = -4k$ на её грань $\sigma_x + \sigma_y = -4k$. В тот же момент времени, когда при $x = s$ выполняется последнее условие, от этой прямой ($x = s$) отделяются две границы, задавая область течения при условии $\sigma_x + \sigma_y = -4k$. Эти границы $x = s - n_2(t)$ и $x = s + n_2(t)$ выделяют новую область пластического течения. Необратимые деформации, накопленные в условии $2\sigma_y - \sigma_x = -4k$, до момента прихода в данную точку пластины новых упругопластических границ оказываются начальными условиями для их дальнейшего роста уже в условиях новой грани поверхности нагружения $\sigma_x + \sigma_y = -4k$. Обозначая данные начальные необратимые (пластические) деформации через p_x и p_y , соотношения (2) закона Дюамеля – Неймана запишем теперь в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{x,x} - p_x - e_x^p) - 2\lambda\mu(e_y^p + p_y) - 6\alpha\mu KT_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= (2\mu\lambda(u_{x,x} - e_x^p - p_x) - 4\mu(\lambda + \mu)(e_y^p + p_y) - 6\alpha\mu KT_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Следуя уравнению равновесия $\sigma_{x,x} = 0$ и ассоциированному закону пластического течения, получаем решения задачи в новой области течения в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = -4k - C_1, \\ u_x &= 2 \int_{n_2(t)}^x \frac{k(\rho)}{\mu(\rho)} d\rho + C_1 \int_{n_2(t)}^x \frac{1}{\mu(\rho)} d\rho + C_4, \\ e_x^p = e_y^p = -2e_z^p &= \frac{4}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu K} k - \alpha T_0\theta - p_x + \frac{C_1}{2\mu}. \end{aligned} \quad (20)$$

Постоянную $C_4(t)$ вместе с положением $x = n_2(t)$ границы, разделяющей область течений на части, где пластическое течение подвержено разным механизмам, его задающим, следует определить в каждый рассчитываемый момент времени вместе с $C_3(t)$ и $n_1(t)$. Для этого следует воспользоваться граничными условиями и условиями на продвигающихся границах $x = n_1(t)$ и $x = n_2(t)$, из которых следует соответствующая система алгебраических уравнений.

Расчёты показывают, что граница $x = n_2(t)$, разделяющая пластическую область на части, продвигаясь по пластине, в некоторый момент времени догоняет упругопластическую границу $x = n_1(t)$, после чего развивается только одна пластическая область $n_2(t) \leq x \leq s$, где пластическое течение подвержено условию грани $\sigma_x + \sigma_y = -4k$ призмы Ивлева.

Обратное пластическое течение

Последовательность возникновения и исчезновения пластического течения схематически показана на рис. 3, где a – термоупругое деформирование; b – деформирование с зародившейся первой областью течения; v – деформирование с разделённой областью течения; z – деформирование после поглощения изначальной области течения; t_1, t_2, t_3 – последовательные моменты вре-

мени перестройки процесса деформирования, связанные с моментами возникновения (или исчезновения) областей пластического течения.

Пусть теперь в некоторый последующий момент времени $t = t_4 > t_3$ нагревание прекращается. В этот же момент времени материал пластины мгновенно возвращается в термоупругое состояние. Пластическое течение мгновенно прекращается, а термоупругое деформирование продолжается, но теперь в условиях присутствия накопленных и со временем неизменяющихся необратимых деформаций p_x и p_y (см. рис. 3, д).

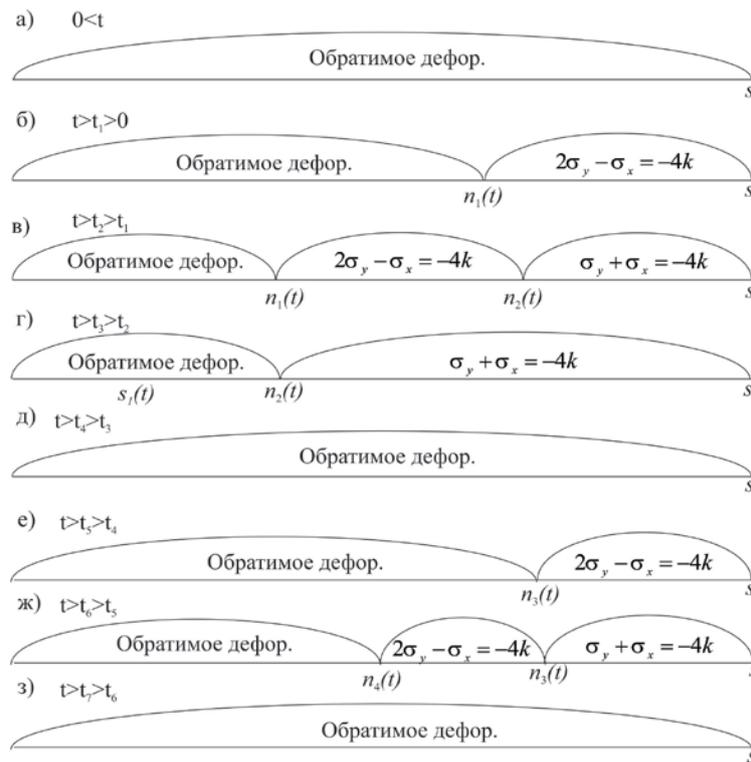


Рис. 3. Схема деформирования материала пластины

Соотношения закона Дюамеля – Неймана вместе с уравнением равновесия позволяют записать решение в области данного обратимого деформирования в виде

$$\sigma_x = C_1, \quad \sigma_y = -\frac{3K\mu\alpha T_0\theta}{\lambda + \mu} + \frac{p_y}{\lambda + \mu} + \frac{C_1}{2(\lambda + \mu)},$$

$$u_x = \frac{3}{2}\alpha T_0 \int_0^x K(\rho)\theta(\rho)\gamma_1(\rho) d\rho + \frac{1}{2} \int_0^x \lambda(\rho) p_y(\rho)\gamma_1(\rho) d\rho +$$

$$+ \int_0^x p_x(\rho) d\rho + \frac{1}{4} C_1 \int_0^x \gamma_1(\rho)\gamma_2(\rho)\mu(\rho)^{-1} d\rho + C_3(t).$$
(21)

Расчёты показывают, что решение (21) не является окончательным. В некоторый последующий момент времени (на рис. 3 это $t = t_5$) на линии $x = s$ выполнится условие пластичности, соответствующее грани $2\sigma_y - \sigma_x = 4k$ призмы Ивлева (на рис. 2 это линия в плоскости $\sigma_z = 0$). Противоположный знак в уравнении такой прямой, являющейся условием пластичности, в сравнении со случаем активного нагружения, говорит о том, что возникающее пластическое течение при общей разгрузке связано с растягивающими, а не сжимающими напряжениями. Пластическое тече-

ние данного свойства называется повторным [4; 5], или обратным [8; 19]. Выполнение условия пластичности Ишлинского – Ивлева на грани (линии $2\sigma_y - \sigma_x = 4k$ (см. рис. 3, *e*) приводит к развитию новой области пластического течения $s - m_1(t) \leq x \leq s + m_2(t)$. Следуя уравнению равновесия $\sigma_{x,x} = 0$, зависимостям закона Дюамеля – Неймана и ассоциированному закону пластического течения для напряжений, перемещений и необратимых деформаций, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = \frac{1}{2}C_1 + 2k, \\ u_x &= C_1 \int_{m_1(t)}^x \frac{3\lambda(\rho) + 5\mu(\rho)}{12K(\rho)\mu(\rho)} d\rho + \frac{3}{2}\alpha T_0 \int_{m_1(t)}^x \theta(\rho) d\rho - \int_{m_1(t)}^x \frac{k(\rho)}{3K(\rho)} d\rho + \\ &+ \int_{m_1(t)}^x \left(p_x(\rho) + \frac{1}{2}p_y(\rho) \right) d\rho + C_3, \\ e_x^p &= -\frac{1}{2}e_y^p = -\frac{1}{2}e_z^p = \frac{C_1}{12K} + \frac{1}{2}\alpha T_0 \theta - \frac{\lambda + \mu}{3K\mu}k + \frac{1}{2}p_y. \end{aligned} \tag{22}$$

Продолжая вычисления, то есть производя последующие шаги во времени, обнаруживаем, что на линии $x = s$ выполнится условие пластичности в форме $\sigma_x + \sigma_y = 4k$. Выше было показано, что деформирование в таких условиях неосуществимо. Следовательно, в этот момент времени (на рис. 3, *ж* это $t = t_6$) происходит мгновенный переход в пластическом течении от соответствия грани $2\sigma_y - \sigma_x = 4k$ к соответствию грани $\sigma_x + \sigma_y = 4k$. В рассматриваемой задаче плоского напряжённого состояния ($\sigma_z = 0$) данный переход является мгновенным переходом напряжений σ_x и σ_y от соответствия прямой с уравнением $2\sigma_y - \sigma_x = 4k$ в плоскости (σ_x, σ_y) (см. рис. 2) к соответствию прямой $\sigma_x + \sigma_y = 4k$, минуя точку пересечения этих прямых. Таким образом, формируется новая область повторного (обратного) пластического течения $s - m_1(t) \leq x \leq s + m_2(t)$ (см. рис. 3, *жс*). Решение задачи в этой области течения подчинено тем же зависимостям (20), только с обратным знаком перед пределом текучести.

Здесь уместно рассмотреть два случая. В первом из них положить, что продолжают выполняться зависимости (7) для упругих моделей. Это означает, что в материале пластины не произошло структурных изменений; он остаётся упругопластическим с упругими модулями, зависящими от температуры. Если же считать, что такие изменения случились, то упругие модели при прекращении пластического течения следует фиксировать в том состоянии, которого они достигли в процессе течения. Иначе, как только напряжённое состояние покидает грань призмы Ивлева, то упругие постоянные далее не меняются. Далее, сравним результаты расчётов для таких принципиально важных случаев.

Остаточные напряжения

Конечным итогом вычислений является состояние, в котором температура в пластине выравнивается, то есть градиент температуры обращается в ноль (см. рис. 3, *з*). В таком состоянии напряжения вычисляются зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(4\mu(\lambda + \mu)(u_{x,x} - p_x) - 2\lambda\mu p_y \right) (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_y &= \left(2\mu\lambda(u_{x,x} - p_x) - 4\mu(\lambda + \mu)p_y \right) (\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

В состояниях (23) λ и μ принимаются либо изначальные значения, когда фазовые превращения не учитываются, либо значения их в момент остановки пластического течения. В любом случае они, не зависящие от времени, являются постоянными величинами. Остаточные напряже-

ния и итоговое поле перемещений, а следовательно, и деформации, находим по описанному алгоритму:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_1, \quad \sigma_y = 0.5\lambda C_1 (\lambda + \mu)^{-1} - 3K\mu (\lambda + \mu)^{-1} p_y, \\ u_x &= C_1 \int_0^x (\lambda(\rho) + 2\mu(\rho)) x (4\mu(\rho) (\lambda(\rho) + \mu(\rho)))^{-1} d\rho + \int_0^x p_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x p_y(\rho) d\rho, \\ C_1 &= - \frac{\left(\int_0^s p_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^s p_y(\rho) d\rho \right)}{\left(\int_0^s (\lambda(\rho) + 2\mu(\rho)) x (4\mu(\rho) (\lambda(\rho) + \mu(\rho)))^{-1} d\rho \right)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если предположить, что фазовые изменения не учитываются, то в (24) перемещение переписывается и будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} u_x &= (\lambda + 2\mu) x (4\mu (\lambda + \mu))^{-1} C_1 + \int_0^x p_x(\rho) d\rho + 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^x p_y(\rho) d\rho, \\ C_1 &= 2\lambda\mu (\lambda + 2\mu)^{-1} s^{-1} \int_0^s p_y(\rho) d\rho + 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1} s^{-1} \int_0^s p_y(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Результаты расчётов представлены на рис. 4, где сплошной линией указано распределение напряжения $\sigma_y k_0^{-1}$ по ширине пластины для $T(t_4) = 0,85T_p$ (сплошная) и для $T(t_4) = 0,55T_p$ (штриховая). На рис. 4, а показано, что λ и μ продолжали уменьшаться согласно (7), а на рис. 4, б отражён запрет их изменения при падении температуры. Постоянные в расчётах полагались равными: $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_p = 660 \text{ }^\circ\text{C}$; $a = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $k_0 = 210 \text{ МПа}$; $E_0 = 72 \text{ ГПа}$; $E_p = 49 \text{ ГПа}$; $\mu_0 = 0,3$; $\mu_p = 0,5$; $s = 0,1 \text{ м}$. Напряжения $\sigma_x = 0,09k_0$ при $T(t_4) = 0,85T_p$ и $\sigma_x = 0,041k_0$ при $T(t_4) = 0,55T_p$ не одинаковы в рассмотренных случаях.

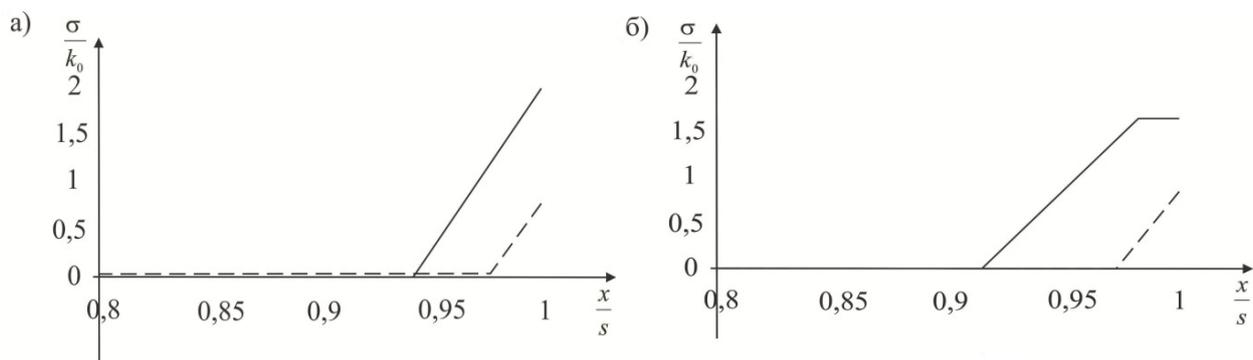


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в материале пластины: а – при неучёте фазовых переходов; б – при учёте фазовых переходов

Вывод

Таким образом, остаточное напряжение $\sigma_x = 0,041k_0$ получается, если параметры λ и μ увеличиваются при остывании. Если же эти параметры не увеличиваются, тогда остаточное напряжение будет $\sigma_x = 0,048k_0$. В последнем случае размер зоны термического влияния больше, остаточные напряжения – меньше. При $T(t_4) = 0,55T_p$ отсутствует обратное (повторное) пластическое течение.



ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, С. Е. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению / С. Е. Александров, Е. В. Ломакин, Й. Р. Дзенг // Доклады Академии наук. Механика. – 2012. – № 3(443). – С. 310-312.
2. Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2014. – № 2. – С. 124-131.
3. Буренин, А. А. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Доклады Академии наук. Механика. – 2015. – № 3(464). – С. 284-287.
4. Буренин, А. А. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, М. В. Полоник // Доклады Академии наук. Механика. – 2000. – № 6(375). – С. 767-769.
5. Буренин, А. А. К расчёту неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах / А. А. Буренин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Вычислительная механика сплошных сред. – Пермь: Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН), 2017. – № 3(10). – С. 245-259.
6. Быковцев, Г. И. Теория пластичности: моногр. / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
7. Гринфельд, М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений: моногр. / М. А. Гринфельд. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
8. Дац, Е. П. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки / Е. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт // Вестник Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И. Я. Яковлева»). Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 225-235.
9. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности: моногр. / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
10. Лешковцев, В. Г. Расчёт закалочных напряжений в стальных деталях с учётом упруговязкопластических свойств и изменения фазового состава / В. Г. Лешковцев, А. М. Покровский // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 1999. – № 2. – С. 101.
11. Надаи, А. Пластичность и разрушение твёрдых тел. В 2 т. Т. 2. / А. Надаи. – М: Мир, 1969. – 864 с.
12. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
13. Рыкалин, Н. Н. Расчёты тепловых процессов при сварке: моногр. / Н. Н. Рыкалин. – М.: МАШГИЗ, 1951. – 295 с.
14. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
15. Токий, Н. В. Температурная зависимость модуля упругости субмикроструктурной меди / Н. В. Токий, В. В. Токий, А. Н. Пилипенко [и др.] // Физика твёрдого тела. – 2014. – Вып. 5 (56). – С. 966-969.
16. Bengeri, M. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit / M. Bengeri, W. Mack // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 103. – P. 243-257.
17. Bland, D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients / D. R. Bland // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 1956. – Vol. 4. – P. 209-229.
18. Gamer, U. A. Concise treatment of the shrink fit with elastic-plastic hub / U. A. Gamer // Int. J. Solids. Struct. – 1992. – Vol. 29. – P. 2463-2469.
19. Kovacs, A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. / A. Kovacs // Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. – 1996. – Vol. 40. – № 2. – P. 103-112.
20. Lippman, H. The effect of a temperature cycle the stress distribution in a shrink fit / H. Lippman // Int. J. plasticity. – 1992. – Vol. 8(5). – P. 567-582.
21. Perzyna, P. Problems of thermoplasticity. Nuclear engineering and design. / P. Perzyna, A. Sawezuk // North-Holland Publ. Co. – 1973. – Vol. 24. – P. 1-55.