

Лошманов А. Ю., Сиротин А. А., Хромов А. И.
A. Yu. Loshmanov, A. A. Sirotin, A. I. Khromov

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

DEFORMATION CONDITIONS OF COMPRESSED HARD-PLASTIC BODIES

Лошманов Антон Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: loshmanov@kmscom.ru.

Mr. Anton Yu. Loshmanov – PhD in Physics and Mathematics, Associate professor, Applied Mathematics and Information Technology Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: loshmanov@kmscom.ru.

Сиротин Антон Алексеевич – старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: pmi@knastu.ru.

Mr. Anton A. Sirotin – senior lecturer, Applied Mathematics and Information Technology Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: pmi@knastu.ru.

Хромов Александр Игоревич – заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: khromovai@list.ru.

Mr. Alexander I. Khromov – Honored Scientist of the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Applied Mathematics and Information Technology Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: khromovai@list.ru.

Аннотация. В работе рассматривается описание достижения предельного состояния упрочняющихся жёсткопластических тел на основании гипотезы об определении достижения такого состояния исчерпанием пластических свойств материала. Представлены поверхности деформационных состояний и описаны предельные состояния для пластически сжимаемых жёсткопластических сред; выведены соотношения, позволяющие построить линии, определяющие деформирование образцов при плоской деформации.

Summary. The paper describes possessing limiting state of hardening rigid-plastic bodies proceeding from the hypothesis that such a state could be possessed by the exhaustion of the plastic properties of the material. The surfaces of deformation states for plastically compressible rigid-plastic media are presented, limiting states for plastically compressible rigid-plastic media are described, and relationships are derived that allow constructing lines that deform the samples under planar deformation.

Ключевые слова: предельное состояние, упрочнение, жёсткопластическое тело, пластические свойства, сжимаемый материал, критерий хрупкости.

Key words: ultimate state, hardening, rigid-plastic body, plastic properties, compressible material, criterion of brittleness.

УДК 639.3

Деформационные состояния и разрушение несжимаемых жёсткопластических тел рассматривались в работах [1 – 4]. Необходимость определения поверхности деформационных состояний определяется возможностью описания предельных состояний упрочняющихся жёсткопластических тел. Это описание связывалось с гипотезой Серенсена о том, что достижение предельного

состояния определяется исчерпанием пластических свойств материала, то есть при достижении предельного состояния материал не может деформироваться непрерывно, а пластическое течение его возможно только при наличии разрывов поля скоростей перемещений. Подход, рассматриваемый ниже, обобщается на случай пластически сжимаемого материала.

Поверхности деформационных состояний для пластически сжимаемых жёсткопластических сред

Поверхность деформационных состояний связана с формулировкой закона сохранения массы в виде уравнения неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho V_{\kappa,\kappa} = 0 \text{ или } V_{\kappa,\kappa} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho], \quad (1)$$

где ρ – плотность материала; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}}$ – материальная производная; V_{κ} – скорость перемещения частиц материала. Примем за меру деформаций тензор конечных деформаций Альманси:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_{\kappa}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{\kappa}}{\partial x_j} \right). \quad (2)$$

Компоненты тензора скоростей деформации определяются в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

Здесь X_i, x_i – соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты частиц материала.

Тензоры E_{ij} и ε_{ij} связаны соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{i\kappa} \frac{\partial V_{\kappa}}{\partial x_j} + E_{j\kappa} \frac{\partial V_{\kappa}}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

Рассмотрим поле скоростей вида [1]:

$$V_1 = x_1 \varepsilon_1(t), V_2 = x_2 \varepsilon_2(t), V_3 = x_3 \varepsilon_3(t), \quad (5)$$

которое задаёт простой тип нагружения, когда тензоры деформаций и скоростей деформаций предполагаются соосными. Согласно (5) компоненты тензора скоростей деформаций определяются в виде $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_3(t)$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, то есть $\varepsilon_i(t)$ – главные значения тензора скоростей деформаций в выбранной декартовой системе координат. Уравнение (1) примет следующий вид:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{d}{dt} [\ln \rho]. \quad (6)$$

С учётом поля скоростей (5) соотношения (4) примут такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{11}}{dt} &= (1 - 2E_{11}) \varepsilon_1(t), \\ \frac{dE_{22}}{dt} &= (1 - 2E_{22}) \varepsilon_2(t), \\ \frac{dE_{33}}{dt} &= (1 - 2E_{33}) \varepsilon_3(t). \end{aligned} \quad (7)$$

После интегрирования и суммирования выражения (7) преобразуются к виду

$$\ln(1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3) = 2\ln\rho - 2\ln\rho_0 = 2\ln\frac{\rho}{\rho_0}, \quad (8)$$

где ρ_0 – начальная плотность материала. Из (8) следует, что

$$(1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (9)$$

При $\rho = \rho_0$ уравнение (9) будет определять в пространстве главных деформаций (E_1, E_2, E_3) поверхность деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела, рассматриваемой в работах [1 – 4].

Уравнение (9) может быть записано через основные инварианты тензора конечных деформаций Альманси:

$$1 - 2I_E + 4\Pi_E - 8\Pi\Pi_E = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (10)$$

Уравнения (10) задают деформационные состояния пластически сжимаемого тела в виде семейства плоскостей, квадрат расстояния которых от начала координат определяется относительным изменением плотности материала в процессе пластического деформирования.

1. Предельные состояния для пластически сжимаемых жёсткопластических сред

Введение поверхностей деформационных состояний позволяет интерпретировать предельные состояния в виде линий на этих поверхностях. Предельные состояния пластических сред связываются, как правило, с качественным изменением процесса деформирования пластического тела. Такие характерные качественные изменения традиционно вводятся при рассмотрении одноосного растяжения плоских и цилиндрических образцов и связаны с тремя этапами [5]:

- 1) растяжением образца до момента образования шейки (до этого этапа материал ведёт себя практически как пластически несжимаемый);
- 2) образованием шейки и зарождением пор в материале (считается, что на этом этапе материал можно считать сжимаемым);
- 3) объединением пор в общую макротрещину, что собственно связано с разрушением материала.

Такому подходу соответствуют два вида предельных состояний пластических сред:

- 1) состояние перехода пластически несжимаемого материала в пластически сжимаемое;
- 2) образование макротрещины, связанное с объединением пор.

Полученное соотношение (10) позволяет ввести критерий разрушения материала по предельной плотности. При этом первое предельное состояние будет определяться соотношением $\frac{\rho}{\rho_0} = \bar{\rho} = 1$. И этому будет соответствовать некоторая плоскость (см. рис. 1).

Второе предельное состояние определяется соотношением $\bar{\rho} = \rho^*$. Этому будет соответствовать плоскость в пространстве основных инвариантов тензора деформаций, параллельная плоскости, определяющей первое предельное состояние.

Указанную величину (ρ^*) можно определить из диаграммы нагружения образцов для конкретных материалов в условиях плоской деформации, осесимметричной деформации и плоского напряжённого состояния как деформированные состояния, соответствующие σ_B . Описание деформирования образцов в указанных условиях рассмотрены в работах [6 – 13].

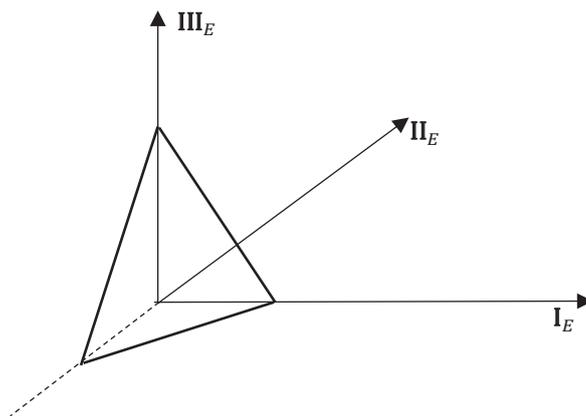


Рис. 1. Поверхность деформационных состояний

Деформация в условиях плоской деформации определяется следующими соотношениями:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\bar{\varepsilon} + 1)^2}, \quad E_2 = e - g = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}, \quad \text{где } \bar{\varepsilon} \text{ – относительное удлинение образца.}$$

Деформация в условиях осесимметричной деформации определяется следующими соотно-

шениями: $E_1 = e + g = \frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}(2 + \bar{\varepsilon})}{(1 + \bar{\varepsilon})^2}$, $E_2 = e - g = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}$, $E_3 = r^2 E_{\text{фп}} = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}$, а в условиях плоского

напряжённого состояния

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{-1/\sqrt{2}}}{2}, \quad E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{\sqrt{2}}}{2},$$

$$E_3 = -1 + \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{-1/\sqrt{2}}}{2} + \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{\sqrt{2}}}{2}.$$

Эти соотношения позволяют построить линии, определяющие деформирование образцов при плоской деформации, осесимметричной деформации и плоском напряжённом состоянии в пространстве основных инвариантов тензора конечных деформаций. Указанные зависимости получены в предположении пластической несжимаемости материалов. Конечной точке этих линий соответствует разрушение образцов. Заметим, что эти точки должны находиться на определённой поверхности, определяемой уравнением (10).

2. Условие пластичности Мизеса – Шлейхера

Условие пластичности Мизеса – Шлейхера можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} + \beta \sigma = k, \quad (11)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – среднее гидростатическое давление. Используя ассоциированный закон

пластического течения $\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ и условие пластичности (11), найдём:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3}.$$

Складывая полученные выражения и приводя подобные слагаемые, получим следующее:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \lambda\beta. \quad (12)$$

Учитывая (1) и (3), из (12) можно получить $V_{к,к} = \lambda\beta$ и $\beta = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} [\ln \rho]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочеров, Е. П. Деформационные состояния и разрушение идеальных жёсткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2006. – № 42. – С. 66-71.
2. Хромов, А. И. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жёсткопластического тела / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2006. – № 43. – С. 88-91.
3. Хромов, А. И. Деформационные состояния и условия разрушения жёсткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 413. – № 4. – С. 481-485.
4. Буханько, А. А. Деформационно-энергетический критерий разрушения жёсткопластических тел / А. А. Буханько, А. Л. Григорьева, Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2009. – № 6. – С. 178-186.
5. Бобылев, А. В. Механические и технологические свойства металлов: справочник / А. В. Бобылев. – М.: Металлургия, 1987. – 208 с.
6. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения / А. И. Хромов // Математика. Механика. Информатика: труды конференции, посвящённой 10-летию РФФИ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – С. 403-420.
7. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова // Владивосток: Дальнаука, 2005. – 159 с.
8. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Доклады Академии наук. – 2006. – Т. 407. – № 6. С. 777-781.
9. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2005. – № 3. – С. 137-152.
10. Козлова, О. В. Константы разрушения для идеальных жёсткопластических тел / О. В. Козлова, А. И. Хромов // Доклады Академии наук. – Т. 385. – № 3. – 2002. – С. 342-345.
11. Григорьева, А. Л. Одноосное растяжение жёсткопластической полосы в условиях плоского напряжённого состояния при однородном поле скоростей деформаций / А. Л. Григорьева, А. И. Хромов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2015. – № 4(26). – С. 198-205.
12. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жёсткопластической полосы при растяжении / А. И. Хромов // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 1. – С. 136-142.
13. Хромов, А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жёсткопластических тел / А. И. Хромов // Доклады Академии наук. – 1998. – Т. 362. – № 2. – С. 202-205.