**Феоктистов С. И., Марьин С. Б.**
**S. I. Feoktistov, S. B. Maryin**

## ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ ПАРАБОЛ В КАЖДОЙ УЗЛОВОЙ ТОЧКЕ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

## APPROXIMATE CALCULATION OF THE INTEGRAL BY THE METHOD OF PARABOLAS AT EACH NODAL POINT OF THE INTEGRAND

**Феоктистов Сергей Иванович** – доктор технических наук, профессор кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина 27. E-mail: serg_feo@mail.ru.
**Sergey I. Feoktistov –** Doctor of Engineering, Professor, Aircraft Building Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 27, Lenin Pr., Komsomolsk-on-Amur, 681013. E-mail: serg_feo @mail.ru.

**Марьин Сергей Борисович** – доктор технических наук, заведующий кафедрой «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); тел. 8(4217)24-11-90. E-mail: as@knastu.ru.
**Maryin Sergey Borisovich** – Doctor of Engineering, Head of Department «Aircraft Industry», Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); tel. 8(4217)24-11-90. E-mail: as@knastu.ru.

**Аннотация.** В работе рассмотрен вывод формулы, позволяющей получать приближённое значение интеграла в каждой точке изменения аргумента подынтегральной функции, что даёт возможность проводить кратное интегрирование методом парабол без увеличения шага разбиения области интегрирования.

**Summary.** In this paper, we consider the derivation of a formula that allows us to obtain an approximate value of the integral at each point of change in the argument of the integrand, which makes it possible to perform multiple integration using the parabola method without increasing the step of splitting the integration domain.

**Ключевые слова:** численное интегрирование, метод парабол, кратное интегрирование.

**Key words:** numerical integration, parabola method, multiple integration.

УДК 519.6

В вычислительной технике широко используются две формулы для приближённого вычисления интеграла: формула трапеций и формула парабол (формула Симпсона) [1].

При одинаковом шаге разбиения интервала интегрирования формула трапеций даёт бóльшую погрешность, чем формула Симпсона. Однако формула Симпсона имеет существенный недостаток: она даёт значение интеграла не в каждой точке изменения аргумента подынтегральной функции, а через точку. Также необходимым условием является то, что количество интервалов разбиения области интегрирования должно быть чётным.

При решении многих задач механики сплошных сред необходимо знать значения интеграла в каждой точке изменения подынтегральной функции для проведения кратного интегрирования. В этом случае, как правило, вычисления проводят по формуле трапеций, но для уменьшения погрешности вычислений идут на увеличение числа интервалов разбиения, что в свою очередь увеличивает время, необходимое для расчётов.

Рассмотрим процесс интегрирования с целью получения формулы, аналогичной формуле Симпсона, но дающей значения интеграла в каждой точке изменения аргумента подынтегральной функции.

Определим значение интеграла в области $[a,b]$ функции $y = f(x)$:

$$S_n = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

Разобьём область $[a, b]$ на $n$ элементарных отрезков одинаковой длины. Обозначим абсциссы точек деления через

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Таким образом, шаг численного интегрирования $h$ определится выражением

$$h = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \tag{1}$$

где $k$ – номер произвольной точки разбиения области интегрирования.

Определим значения функции $y = f(x)$ в каждой точке разбиения области интегрирования и обозначим их соответственно

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_{n-2},\ y_{n-1},\ x_n.$$

Проводя через три любые соседние точки кривой дугу квадратичной параболы, ось которой параллельна оси ординат, получим две элементарные трапеции, у которых криволинейной границей служит дуга параболы (см. рис. 1).

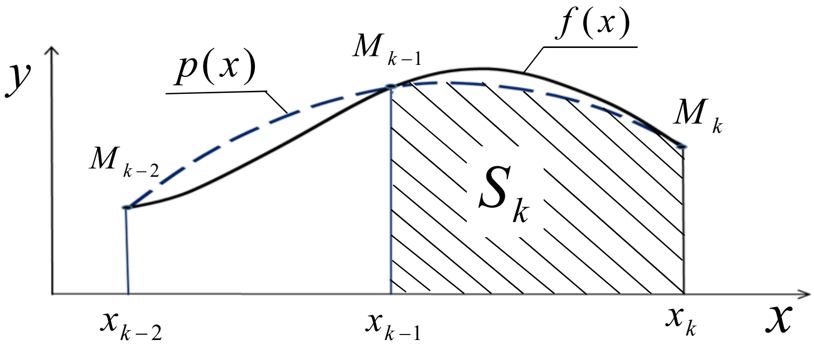


Рис. 1. Схема приближённого интегрирования

Три точки определяют единственную параболу $y' = p(x) = a'x^2 + b'x + c'$. Если $M_{k-2}$, $M_{k-1}$, $M_k$ – три соседние точки кривой $y = f(x)$, то площадь трапеции $S_k$, ограниченной дугой параболы, определяется по формуле

$$S_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(a'x^2 + b'x + c'\right) dx.$$

Проводя интегрирование, получим

$$S_k = \frac{1}{6}\left[2a'\left(x_k^3 - x_{k-1}^3\right) + 3b'\left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) + 6c'\left(x_k - x_{k-1}\right)\right],$$

или, после простых преобразований, имеем

$$S_k = \frac{\left(x_k - x_{k-1}\right)}{6}\left[2a'\left(x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2\right) + 3b'\left(x_k + x_{k-1}\right) + 6c'\right]. \tag{2}$$

Принимая во внимание, что $\left(x_k - x_{k-1}\right) = h$ (см. выражение (1)), запишем полученную формулу в виде формулы Симпсона:

$$S_k = \frac{h}{6}\left(A\,y_k + B\,y_{k-1} + C\,y_{k-2}\right).$$

Учитывая, что $y_k = y'_k$, определяем значения $y_k$, $y_{k-1}$, $y_{k-2}$ из уравнения параболы и, группируя, имеем

$$S_k = \frac{h}{6}\left[a'\left(A\,x_k^2 + B\,x_{k-1}^2 + C\,x_{k-2}^{\,2}\right) + b'\left(A\,x_k + B\,x_{k-1} + C\,x_{k-2}\right) + c'\left(A + B + C\right)\right]. \qquad (3)$$

Сравнивая уравнения (2) и (3), можно сделать вывод, что они тождественны в том случае, если выражения, стоящие при $a'$, $b'$, $c'$, равны, то есть

$$\begin{cases} A\,x_k^2 + B\,x_{k-1}^2 + C\,x_{k-2}^2 = 2\,x_k^2 + 2\,x_k x_{k-1} + 2\,x_{k-1}^2; \\ A\,x_k + B\,x_{k-1} + C\,x_{k-2} = 3\,x_k + 3\,x_{k-1}; \\ A + B + C = 6. \end{cases} \qquad (4)$$

Учитывая, что мы делим область интегрирования $\left[a, b\right]$ на *n* равных частей, имеем

$$x_{k-1} = \frac{x_k + x_{k-2}}{2}$$

или

$$x_{k-2} = 2\,x_{k-1} - x_k\,. \qquad (5)$$

Подставляя выражение (5) в первое уравнение системы (4) и проведя группирование, получим

$$\left(A + C\right)x_k^2 - 4\,C\,x_k x_{k-1} + (B + 4\,C)\,x_{k-1}^2 = 2\,x_k^2 + 2\,x_k x_{k-1} + 2\,x_{k-1}^2. \qquad (6)$$

Из условия равенства правой и левой части выражения (6) получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A + C = 2; \\ 4\,C = -2; \\ B + 4\,C = 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Решая систему уравнений (7), определяем коэффициенты *A*, *B* и *C*:

$$A = 2{,}5;\ B = 4;\ C = -0{,}5.$$

Таким образом, получили формулу парабол для приближённого численного вычисления интеграла в интервале $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$, равном шагу интегрирования *h*:

$$S_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(2{,}5\,y_k + 4\,y_{k-1} - 0{,}5\,y_{k-2}\right).$$

В интервале $\left[x_0,\ x_1\right]$ этой формулой пользоваться нельзя, но можно показать, что в начале области интегрирования $\left[a, b\right]$ площадь первого элемента определяется выражением

$$S_1 = \frac{h}{6}\left(2{,}5\,y_0 + 4\,y_1 - 0{,}5\,y_2\right).$$

Окончательно составная формула парабол для приближённого вычисления интеграла в области интегрирования $\left[a, b\right]$ будет иметь вид

$$S_n = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[\left(2{,}5\,y_0 + 4\,y_1 - 0{,}5\,y_2\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(2{,}5\,y_k + 4\,y_{k-1} - 0{,}5\,y_{k-2}\right)\right]. \qquad (8)$$

Если интервал $[a,b]$ разбить на два равных отрезка и проинтегрировать, применяя формулу (8), то получим формулу Симпсона:

$$S_{1,2} = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\,y_1 + y_2\right),$$

что подтверждает правильность сделанных выводов.

Формула (8) позволяет численно определить приближённое значение интеграла в каждой точке изменения аргумента подынтегральной функции в области $[a,b]$ с шагом $h$, что даёт возможность использовать полученные результаты для кратного численного интегрирования с тем же шагом.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 584 с.