

Герасименко Е. А.
E. A. Gerasimenko

К ПРОБЛЕМЕ ВЫДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВОВ В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТАХ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

ON THE PROBLEM OF GAP EXTRACTION IN NUMERICAL CALCULATIONS OF DEFORMATION DYNAMICS

Герасименко Екатерина Андреевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток); 690041, Владивосток, ул. Радио, 5; тел. 8(4232)310-214. E-mail: gerasimenko@iacp.dvo.ru.

Ekaterina A. Gerasimenko – PhD in Physics and Mathematics, Researcher at the Institute of Automatics and Control Processes, Far East Branch, Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok); 5 Radio St., Vladivostok, 690041; tel. 8(4232)310-214. E-mail: gerasimenko@iacp.dvo.ru.

Аннотация. В статье обсуждается один из способов выделения поверхностей разрыва в деформируемых материалах. Метод основан на включении в конечно-разностную схему расчётов прифронтных асимптотик, рассчитываемых с помощью метода лучевых рядов. Прифронтные лучевые разложения используются в качестве начальных и краевых данных для расчётной схемы. Такой метод позволяет на каждом временном шаге расчётов определять положение поверхностей разрывов скоростей и интенсивности разрывов на них. В качестве иллюстрации применения метода приводится решение одномерной задачи ударно-волновой динамики в несжимаемой нелинейно-упругой среде.

Summary. The paper discusses one of the methods for identifying discontinuity surfaces in deformable materials. The method is based on the inclusion of near-front asymptotics calculated using the ray series method into the finite-difference calculation scheme. The ray-front decompositions are used as initial and boundary data for the computational scheme. This method allows to determine the position of velocity discontinuity surfaces and discontinuity intensities on them at each time step of calculations. As an illustration of the application of the method, we present the solution of a one-dimensional problem of shock-wave dynamics in an incompressible nonlinear elastic medium.

Ключевые слова: ударные волны, методы выделения разрывов, лучевой метод.

Key words: shock waves, shock-fitting methods, ray method.

УДК 539.3;519.63

Введение. Исследование поведения механических волн, распространяющихся в деформируемых материалах в ответ на действие импульсных или ударных нагрузок, является одной из основных проблемных задач современной механики и математической физики. Такие задачи возникают при расчёте на прочность сооружений и механизмов, находящихся под действием динамических нагрузок в процессе их эксплуатации, при расчёте сейсмических и взрывных нагрузок, в высокоскоростных процессах обработки материалов и производства изделий, при разработке новых методов экстракорпоральной ударно-волновой терапии в медицине. Нестационарное воздействие на границы деформируемых тел в таких задачах приводит к распространению поверхностей разрывов скоростей (ударные волны) или ускорений (слабые волны). Для построения решений динамических задач, включающих такие поверхности разрывов, могут применяться аналитические точные или асимптотические методы [4; 21; 25] и численные методы в случаях, когда аналитические методы оказываются недостаточными или неэффективными [16; 13; 23; 24]. Разрабатывались и сеточно-конечно-разностные, и сеточно-характеристические, и конечно-элементные методы расчётов.

Наличие распространяющихся поверхностей разрыва в расчётной области создаёт сложности для численного алгоритма, от которого требуется высокая степень точности в областях глад-

кого решения, но при этом должна быть способность адекватно воспроизводить профили разрывов. В газовой динамике созданы специальные алгоритмические приёмы выделения разрывов, т. е. расчётов места и интенсивности разрывов [3; 11]. Как правило, это двухшаговая схема по типу «предиктор-корректор», основанная на точном или приближённом решении задачи о распаде произвольного разрыва. Однако в динамике твёрдых деформируемых тел из-за взаимодействия процессов распространения сдвиговых и объёмных деформаций задача о распаде комбинированного разрыва может быть решена лишь в редких случаях [2; 14], поэтому в основном применяются различные модификации методов сквозного счёта [13; 16], в которых производные аппроксимируются и через разрывы.

При этом методы сквозного счёта хотя и являются эффективным и широко распространённым способом расчёта динамики деформирования, всё же менее приспособлены для случаев выраженной нестационарности задачи (например, при взаимодействии ударных волн между собой или с преградами) по сравнению с явным выделением разрывов, т. к. появление осцилляций вблизи областей с резкими перепадами сеточных функций, имитирующих разрыв, а также «размазывание» разрыва ввиду вносимой в дифференциальные уравнения движения искусственной вязкости могут приводить к существенным качественным и количественным погрешностям. Поэтому разработка способов выделения разрывов, пригодных для использования в расчётах динамики деформирования твёрдых тел, остается актуальной задачей. Одним из таких способов является метод встраивания в конечно-разностные схемы расчётов прифронтных асимптотик, построенных либо с помощью метода возмущений [18], либо с помощью лучевого метода [5; 12; 9; 10; 19; 7; 15]. Таким способом на каждом временном шаге расчётов уточняется положение поверхности разрывов и интенсивности разрыва на ней. В качестве иллюстрации применения данного метода приведём решение одномерной задачи о распространении цилиндрической ударной волны, вызванной антиплоским сдвигом.

Аналитическое решение методом лучевых рядов. Адиабатическое движение нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды в переменных Эйлера x^i, t описывается следующей системой уравнений:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), \quad 2\mathbf{d} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \quad (1)$$

$$W = (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \dots, \quad I_1 = \text{tr}(\mathbf{d}), \quad I_2 = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d},$$

где \mathbf{u} и \mathbf{v} – векторы перемещений и скорости; \mathbf{d} – тензор деформаций Альманси; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Эйлера-Коши; $W(I_1, I_2)$ – упругий потенциал; $a, \mu, b, \kappa, \theta, c, d, k$ – упругие модули среды; p_0 – добавочное неизвестное гидростатическое давление; \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга.

Поверхность разрывов $\Sigma(t)$, уравнение которой в параметрической форме может быть записано как $x^i = x^i(y^\alpha, t)$ ($y^\alpha, (\alpha = 1, 2)$ – криволинейные координаты на поверхности Σ), разделяет рассматриваемую область V пространства на две: V^+ и V^- . Индексом «+» в соответствии с принятой в теории сингулярных поверхностей терминологией обозначена та часть области V , в направлении которой движется Σ , а индексом «-» – остальная часть V . Под ударной волной понимаем поверхность сильного разрыва, т. е. такую поверхность, на которой перемещения непрерывны, а скорости перемещений и напряжения испытывают конечный разрыв. На поверхностях слабого разрыва напряжения и скорости перемещений остаются непрерывными, а вот их некоторые частные производные претерпевают разрыв.

При переходе через поверхность разрыва система дифференциальных уравнений (1) теряет смысл, но выполняются динамические, геометрические и кинематические условия совместности разрывов [4; 8; 20]. Как уже отмечалось, продолжение решения за волновой фронт возможно различными способами, в том числе методом лучевых рядов, в котором искомые функции аппроксимируются степенным рядом Тейлора по лучевой координате [1] или по времени [22]. В настоящей

работе использовано лучевое разложение в виде, представленном в работе [22], которое в общем случае записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} f(y^\alpha, s, t) &= f^-|_{t=\tau} + \dot{f}^-|_{t=\tau} (t-\tau) + \frac{1}{2} \ddot{f}^-|_{t=\tau} (t-\tau)^2 + \dots = \\ &= (f^+ - [f])|_{t=\tau} + (\dot{f}^+ - [\dot{f}])|_{t=\tau} (t-\tau) + \frac{1}{2} (\ddot{f}^+ - [\ddot{f}])|_{t=\tau} (t-\tau)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где s – расстояние вдоль луча, луч – кривая, в каждой точке которой единичный вектор нормали к волновой поверхности направлен по касательной к этой кривой, координаты y^α на волновой поверхности остаются неизменными вдоль каждого луча, т. е. совпадают с координатами на начальной волновой поверхности $\Sigma(0)$ [8]; $\tau(s) = \int_0^s d\xi / G(\xi)$ – время прихода волнового фронта в данную точку пространства; G – скорость движения волны в направлении нормали, квадратные скобки обозначают скачок заключённой в них величины, а точка над символом – дифференцирование по времени.

Пусть материал, деформационные свойства которого подчинены зависимостям (1), заполняет пространство с цилиндрической полостью, уравнение которой в цилиндрической системе координат (r, φ, z) записывается в виде $r = r_0$. С начального момента времени поверхность полости начинает движение по закону

$$u_z|_{r_0} = F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k F}{dt^k} \Big|_0 t^k \approx v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} + \dots, \quad v_0 \neq 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

что создаёт в пространстве поле перемещений вида $u_r = u_\varphi = 0$, $u_z = u(r, t)$.

Движение среды в цилиндрической системе координат описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений следующих из (1):

$$\begin{aligned} u_{,rr}(1 + 3\alpha u_{,r}^2) + u_{,r}(1 + \alpha u_{,r}^2)/r + \dots \ddot{u}/C^2 + \dots, \\ p_{,r} + \beta u_{,rr} u_{,r} + (1 + \gamma) u_{,r}^2 / 2 + \dots = 0, \quad p = (p_0 - a - \mu) / \mu, \quad (3) \\ \alpha = (a + b + \kappa + d) / \mu, \quad \gamma = a / \mu, \quad \beta = (2a + 2b + 2\mu + \kappa) / \mu, \quad C = \sqrt{\mu / \rho}. \end{aligned}$$

Первое уравнение в (3) служит для определения кинематики деформирования, а согласно второму находится добавочное гидростатическое давление $p(r, t)$, что требует знания функции $u(r, t)$. Следовательно, это уравнение разрешается после того, как решена краевая задача для первого уравнения в (3). Разрыв скорости в граничном условии в начальный момент времени вызывает распространяющуюся по пространству ударную волну Σ , положение которой в пространстве задаётся уравнением $R(t) = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi$. Из закона сохранения импульса на поверхности разрыва следует формула для вычисления скорости Σ :

$$G = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\omega_1}{C} \right)^{2k} \right) = C \left(1 + \gamma_1 \frac{\omega_1^2}{C^2} + \dots \right), \quad \omega_1 = [\dot{u}], \quad \gamma_1 = \alpha / 2,$$

где ω_1 характеризует интенсивность ударной волны, а коэффициенты γ_k зависят от упругих модулей среды. Граничными условиями для системы (3) являются известные перемещения на нагружаемой границе (2), а также условие непрерывности перемещений на Σ и условие непрерывности нормальной к волне компоненты тензора напряжений, следующее из динамических условий совместности:

$$u|_{R(t)} = 0, \quad [\sigma_{rr}]|_{R(t)} = 0, \quad R(t) = r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi \approx r_0 + \int_0^t C \left(1 + \gamma_1 \frac{\omega_1^2}{C^2} + \dots \right) d\xi. \quad (4)$$

Второе условие в (4) используется для вычисления добавочного гидростатического давления. Поле перемещений в окрестности волнового фронта строим в виде лучевого ряда с опорой на граничные условия:

$$u(r, t) \approx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \omega_k|_{\tau} (t - \tau)^k, \quad t \geq \tau, \quad (5)$$

$$u(r, t) = 0, \quad t < \tau, \quad \tau = \int_{r_0}^r G^{-1}(\xi) d\xi, \quad \omega_k = \left[\partial^k u / \partial t^k \right],$$

в котором ограничимся вычислением двух первых его членов.

С целью вычисления разрыва скорости ω_1 и разрывов её производных до k -го порядка необходимо продифференцировать первое уравнение (3) $(k - 1)$ раз по времени, записать результат с каждой стороны от поверхности разрыва и вычислить их разность, привлекая геометрические и кинематические условия совместности. Следуя этому алгоритму, для вычисления коэффициентов лучевого ряда получаем систему уравнений вида

$$\frac{\delta \omega_k}{\delta t} = f_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, R(t)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $\delta / \delta t$ – дельта-производная по времени от функции, заданной на движущейся поверхности [20]. Так, на первом шаге метода получим дифференциальное уравнение изменения интенсивности ударной волны:

$$\frac{\delta \omega_1}{\delta t} = \frac{\omega_1(2\alpha\omega_1\omega_2 / C^2 - C / R - 1.5\alpha\omega_1^2 / RC)}{2 + 5\alpha\omega_1^2 / C^2}.$$

Особенность ударных волн в нелинейных средах состоит в том, что разрыв каждой производной искомой функции зависит от разрыва более высокого порядка, что исключает возможность последовательного интегрирования в отличие от линейного случая или слабых волн, для которых (6) представляет собой систему рекуррентных обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений затухания). Вариант изменения лучевого метода с включением в (5) дополнительных рядов по дельта-производным [6; 24] позволяет свести (6) к алгебраическим соотношениям относительно значений искомых величин в начальный момент времени:

$$\omega_k \approx \omega_{k0} + \frac{\delta \omega_{k0}}{\delta t} t + \dots, \quad \frac{\delta^n \omega_{k0}}{\delta t^n} = \left. \frac{\delta^n \omega_k}{\delta t^n} \right|_{t=0}. \quad (7)$$

Для малых послеударных времён неизвестные константы ω_{k0} могут быть определены из граничного условия. Уравнения (6), вычисленные при $t = 0$, совместно с граничным условием составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно искомых величин. Так, для квадратичного закона движения границы (2) достаточно определить величины ω_{10} , ω_{20} , $\delta \omega_{10} / \delta t$. Таким образом, получается следующее разложение для перемещения за волновым фронтом:

$$u = - \left(\omega_{10} + \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} \tau + \dots \right) (t - \tau) - \frac{1}{2} (\omega_{20} + \dots) (t - \tau)^2 + \dots, \quad (8)$$

$$\tau = \frac{r - r_0}{C(1 + \gamma_1 \omega_{10}^2 / C^2)} - \frac{\gamma_1 \omega_{10} (r - r_0)^2}{C^4 (1 + \gamma_1 \omega_{10}^2 / C^2)^3} \cdot \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} + \dots, \quad \omega_{10} = -v_0, \quad \omega_{20} = -a_0.$$

В зависимости от граничных условий на r_0 решение (8) может быть продолжено с требуемой степенью точности; также не составляет сложностей определить добавочное гидростатическое давление по найденному полю перемещений.

Численная схема. Полагаем, что до момента $t = t_0$ точность лучевого решения является приемлемой в области деформирования $O : r_0 \leq r \leq R(t_0)$ (см. рис. 1). Поэтому поле перемещений и положение волнового фронта определяются зависимостями (8). Несколько первых слоёв этой области задают начальные данные для дальнейших вычислений.

Начиная с момента $t = t_0$ уравнения движения интегрируются численно с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для этого область деформирования $\Omega : t > t_0, r_0 \leq r \leq r_0 + \int_0^t G(\xi) d\xi$ разбивается равномерной сеткой с шагами Δt и Δr по времени и пространству соответственно. В узлах сетки и ищется решение.

Входящие в уравнения частные производные заменяются их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки в соответствии с шаблоном на рис. 2:

$$u_{,r} \approx \frac{u(r + \Delta r, t) - u(r - \Delta r, t)}{2\Delta r}, \quad u_{,rr} \approx \frac{u(r + \Delta r, t) - 2u(r, t) + u(r - \Delta r, t)}{\Delta r^2},$$

$$\dot{u} \approx \frac{u(r, t) - u(r, t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \ddot{u} \approx \frac{u(r, t) - 2u(r, t - \Delta t) + u(r, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2},$$

При замене исходного уравнения его конечно-разностным аналогом получается второй порядок погрешности его аппроксимации по пространственной координате, и первый – по временной, т. е. $O(\Delta r^2 + \Delta t)$.

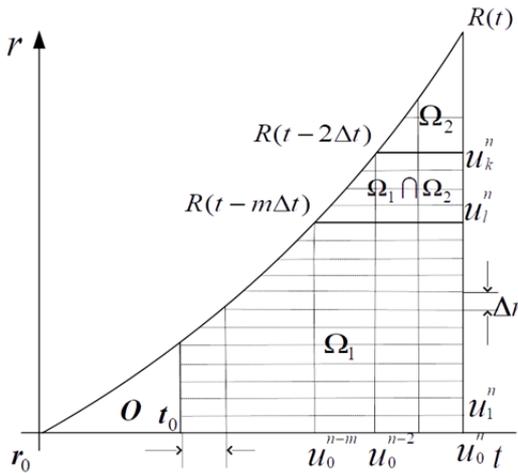


Рис. 1. Область деформирования

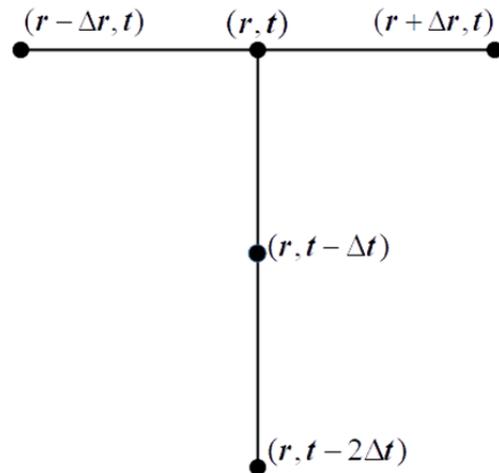


Рис. 2. Шаблон разностной схемы

Для вычисления δ -производной используется следующее конечно-разностное выражение:

$$\frac{\delta \omega_k}{\delta t} \approx \frac{\omega_k(t) - \omega_k(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (9)$$

Следует отметить, что для узлов сетки, лежащих между поверхностью разрывов на последнем временном слое $R(t)$ и её положением на позапрошлом временном слое $R(t - 2\Delta t)$, оказывается невозможной запись конечно-разностных выражений для второй производной по времени, т. к. соответствующие узлы не принадлежат области деформирования.

Таким образом, полагаем, что область деформирования Ω представляет собой две пересекающиеся области: область численного счета $\Omega_1 : r_0 \leq r \leq R(t - 2\Delta t)$ и прифронтную область

$\Omega_2 : R(t - m\Delta t) \leq r \leq R(t)$, $m > 2$. Полагаем, что в этой области Ω_2 поле перемещений описывается лучевыми рядами (8), но константы ω_{k0} считаем неизвестными параметрами. Новые значения констант ω_{k0} определяются путём сравнения результатов расчётов по конечно-разностной схеме с лучевыми рядами. Для этой цели применяется метод наименьших квадратов. Значения перемещений, принадлежащих пересечению областей Ω_1 и Ω_2 , аппроксимируются квадратичной функцией пространственной координаты. Сопоставление коэффициентов полученной таким образом функции с коэффициентами лучевого ряда в фиксированный момент времени позволяет находить параметры лучевого разложения. Новые значения параметров используются для вычисления перемещений в узлах за пределами области Ω_1 , а также для определения положения волнового фронта на следующем временном слое. Таким образом, на каждом временном слое решается система алгебраических уравнений, в которую входят:

- конечно-разностные уравнения для узлов области Ω_1 ;
- лучевые ряды для узлов области Ω_2 ;
- формулы для параметров лучевого разложения, вычисленные с помощью метода наименьших квадратов на пересечении областей Ω_1 и Ω_2 ;
- условие на нагружаемой границе.

Полученная таким образом система решается численно, методом простых итераций. В качестве начального приближения для очередного слоя используются значения перемещений, полученные при подстановке в аналитическое решение параметров ω_1^{n-1} и ω_2^{n-1} предыдущего слоя и времени $t = \Delta t$ (для удобства принимаем, что на последнем временном слое $t = 0$). Начальное приближение для параметров разложения ω_1 и ω_2 на n -м слое принимается $\omega_1^n \approx \omega_1^{n-1} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} \Delta t$ и

$\omega_2^n \approx \omega_2^{n-1}$ соответственно; $\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}$ для слоя $t - \Delta t$ вычисляется по разностной формуле (9). С помощью лучевого разложения вычисляются также поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы. В этом случае константы лучевого разложения находятся по граничному условию.

Далее приводятся некоторые результаты численных расчётов. Расчёт проводился при следующих значениях параметром задачи: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $C = 10^3$ м/с, $\Delta r = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ с, $r_0 = 1$ м, $v_0 = 0,1$ м/с, $a_0 = 20$ м/с². На рис. 3-5 показано распределение поля перемещений вдоль луча, изменение со временем интенсивности ударной волны ω_1 и зависимость положения волнового фронта от времени.

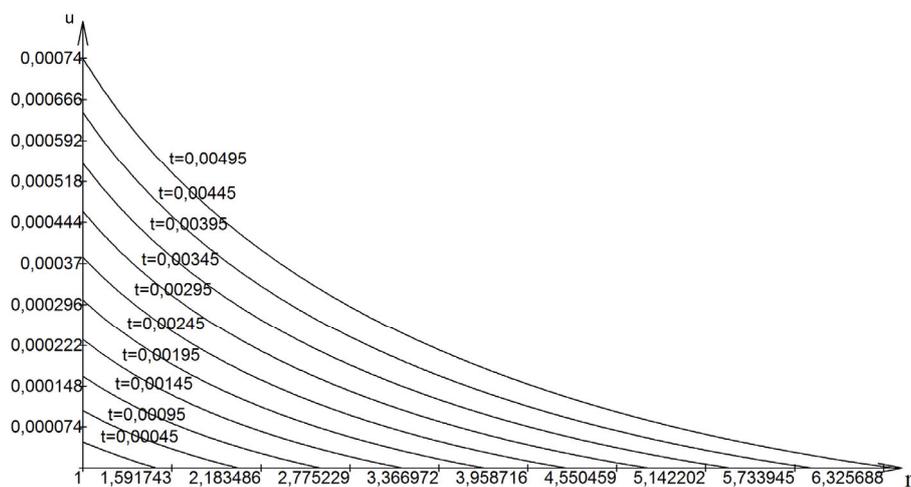


Рис. 3. Распределение поля перемещений вдоль луча для различных моментов времени

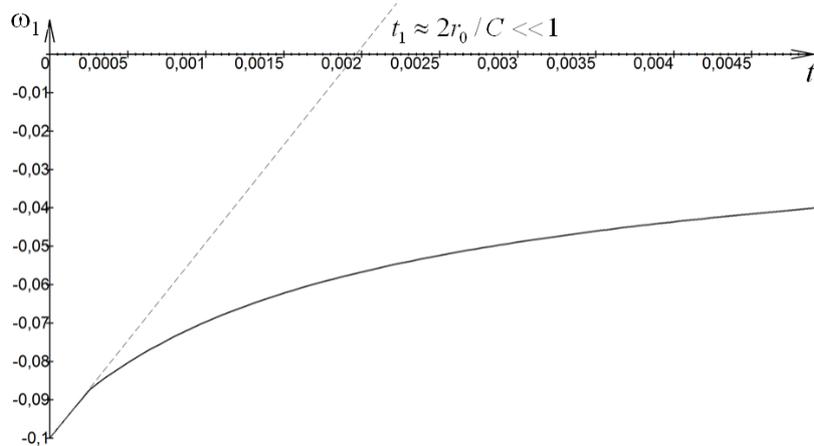


Рис. 4. Изменение ω_1 со временем

Оценка сходимости и устойчивости построенной численной схемы в силу её нелинейности является сложной задачей и экспериментально проверяется на последовательности разностных сеток с измельчающимся шагом. В табл. 1 представлено максимальное относительное отклонение нового решения от полученного ранее.

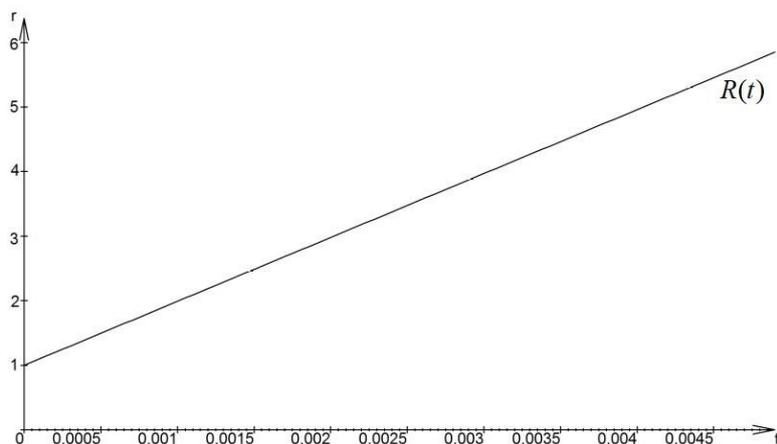


Рис. 5. Зависимость положения волнового фронта от времени

Таблица 1

Максимальное относительное отклонение нового решения от предыдущего при уменьшении шага сетки

Δr , м	Δt , с	ε_{\max}
$\Delta r = 0,005$	$\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$	ε
$\Delta r / 2$	$\Delta t / 2$	$0,05\varepsilon$
$\Delta r / 4$	$\Delta t / 4$	$0,036\varepsilon$
$\Delta r / 8$	$\Delta t / 8$	$0,02\varepsilon$

Рассматривались решения задачи, полученные в момент времени $t = 0,0001$ с при указанных выше условиях. Шаг сеток по пространственной и временной координатам последовательно уменьшается вдвое. Оказывается, что при уменьшении шагов сетки с $\Delta r = 0,005$ м, $\Delta t = 0,00005$ с

до $\Delta r = 0,0025$ м, $\Delta t = 0,000025$ с максимальное относительное отклонение нового решения от полученного ранее составляет 5 %, а при дальнейшем уменьшении шагов сетки в 2 и 4 раза снижается до 3,6 % и 2 % соответственно.

Если в рассмотренной задаче ограничиться только аналитическим приближением, то получается, что интенсивность разрыва ω_1 обращается в ноль уже при $t \approx 2r_0 / C \ll 1$. В то же время из аналогичной линеаризованной задачи, для которой известно точное решение уравнения затухания $\omega_1 = \omega_{10} (1 + Ct / r_0)^{-1/2}$, следует, что интенсивность разрыва стремится к нулю асимптотически. Представленные иллюстрации показывают, что численное решение позволяет избежать такой качественной погрешности, вносимой необходимостью дополнительных разложений интенсивностей разрывов в степенные ряды по времени (7). Также важно, что, в отличие от криволинейных, для плоских волн представление интенсивности разрыва линейной функцией по времени даёт вполне удовлетворительные результаты. Однако чем быстрее изменяется кривизна поверхности разрывов, тем уже становится допустимая область аналитического решения и тем более полезным представляется переход к численной схеме расчётов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабичева, Л. А. Лучевой метод решения динамических задач в упруго-вязко-пластических средах / Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 145-155.
2. Балашов, Д. Б. О распаде разрыва в линейно упрочняющейся упругопластической среде / Д. Б. Балашов // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 1993. – № 2. – С. 121-133.
3. Белоцерковский, О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
4. Бленд, Д. Нелинейная динамическая теория упругости / Д. Бленд. – М.: Мир, 1972. – 183 с.
5. Буренин, А. А. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А. А. Буренин, П. В. Зиновьев // Проблемы механики: сборник статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 146-155.
6. Буренин, А. А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях / А. А. Буренин // Дальневосточный математический журнал. – 1999. – № 8. – С. 49-72.
7. Буренин, А. А. О выделении разрывов в расчётах динамики несжимаемой упругой среды / А. А. Буренин, Г. М. Севастьянов, В. И. Штука // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9. – № 4. – С. 400-411.
8. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука. 1998. – 528 с.
9. Герасименко, Е. А. Расчёты динамики несжимаемой среды при антиплоском и скручивающем ударе / Е. А. Герасименко, А. В. Завертан // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1. – № 3. – С. 46-56.
10. Герасименко, Е. А. Лучевые прифронтные разложения решений в качестве средства выделения разрывов в численных расчётах динамики деформирования / Е. А. Герасименко, А. В. Завертан // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49. – № 4. – С. 722-733.
11. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
12. Зиновьев, П. В. Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред / П. В. Зиновьев, В. Е. Рагозина, А. А. Буренин // Фундаментальные и прикладные вопросы механики. – Хабаровск: ХГТУ, 2003. – С. 64-66.
13. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твёрдых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. – Новосибирск: Изд-во Сибирский университет, 2002. – 352 с.
14. Каменярж, Я. А. О простых волнах и распаде разрыва в упругопластической среде с условием Мизеса / Я. А. Каменярж // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 36. – № 2. – С. 320-329.

15. Ковтанюк, Л. В. Исследование цилиндрических ударных волн в упруго-вязко-пластических несжимаемых телах с помощью метода лучевых рядов / Л. В. Ковтанюк, В. И. Штука // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – № 2 (32). – С. 119-135.
16. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
17. Куропатенко, В. Ф. Методы расчёта ударных волн / В. Ф. Куропатенко // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т. 2. – № 2. – С. 45-59.
18. Рагозина, В. Е. Об использовании прифронтной асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами / В. Е. Рагозина, И. И. Воронин, Е. Л. Вековшинин // Проблемы естествознания и производства. – Владивосток: ДВГТУ, 1995. – Вып. 115. – С. 25-27.
19. Севастьянов, Г. М. Лучевой метод в приближенном решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя / Г. М. Севастьянов, В. И. Штука, А. А. Буренин // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 4 (26). – С. 50-62.
20. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
21. Уизем, Дж. Б. Линейные и нелинейные волны / Дж. Б. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
22. Achenbach I. D., Reddy D. P. Note of wave propagation in lineary viscoelastic media // Z. anqew. Maht. und. Phus. 1967. Bd 18. P. 141-144.
23. Kukudzhanov, V. N. Numerical continuum mechanics (De Gruyter Studies in Mathematical Physics 15) / V. N. Kukudzhanov. – Berlin: De Gruyter, 2013. – 425 p.
24. Seriani, G. Numerical modeling of mechanical wave propagation / G. Seriani, S. P. Oliveira // La Rivista del Nuovo Cimento. 2020. – N. 43. – P. 459-514.
25. Rossikhin, Yu. A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Appl. Mech. Rev. – 1995. – V. 48. – N. 1. – P. 1-39.
26. Rossikhin Y. A., Burenin A. A., Potianikhin D. A. (2019) Shock Waves Via Ray Expansions. In: Altenbach H., Öchsner A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg.