

Ковтаныук Л. В., Панченко Г. Л.
L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

NONISOTHERMAL DEFORMATION OF A FLAT LAYER UNDER CREEP AND PLASTIC FLOW

Ковтаныук Лариса Валентиновна – доктор физико-математических наук, зав. лабораторией механики необратимого деформирования Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН, член-корреспондент Российской академии наук, профессор Российской академии наук (Россия, Владивосток). E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Larisa V. Kovtanyuk – Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Irreversible Deformation Mechanics, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Professor of Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok). E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток). E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru.

Galina L. Panchenko – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok). E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru.

Аннотация. В работе приводятся решения связанных краевых задач теории больших деформаций о деформировании в условиях ползучести и пластического течения материала плоского тяжёлого слоя, расположенного на наклонной плоскости. Контакт материала слоя с наклонной плоскостью полагается жёстким. Рассматривается деформирование в двух случаях: в первом случае свободная граница слоя нагревается, во втором, помимо нагрева, к ней прилагается механическая нагрузка. Рассчитываются деформации, напряжения и температура в каждый момент времени процесса деформирования. Указываются условия возникновения вязкопластического течения и закономерности продвижения упругопластических границ.

Summary. The paper presents solutions to the related boundary value problems of the theory of large strains on deformation under creep and plastic flow conditions of the material of a flat heavy layer located on an inclined plane. The contact of the layer material with the inclined plane is assumed to be rigid. Deformation is considered in two cases: in the first case, the free boundary of the layer is heated, in the second case, in addition to heating, a mechanical load is applied to it. Strains, stresses and temperature are calculated at each moment of the deformation process. The conditions for the occurrence of a viscoplastic flow and the patterns of advancement of elastoplastic boundaries are indicated.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вязкость, пластичность, большие деформации, теплопроводность.

Key words: elasticity, creep, viscosity, plasticity, large strains, thermal conductivity.

УДК 539.37+539.214

Введение. Прямолинейные движения жестковязкопластических сред изучены достаточно подробно [1–3]. Учёт упругих свойств деформируемых материалов приводит к необходимости постановок соответствующих краевых задач в рамках теории больших упруговязкопластических деформаций. В областях вязкопластического течения деформации полагать малыми нельзя, а в областях упругого деформирования они существенно зависят от параметров вязкопластического течения. Такие краевые задачи теории рассматривались ранее в работах [4–7].

Одним из требований современной технологической практики [8] является учёт в застойных зонах и продвигающихся ядрах не только упругих (обратимых) деформаций, но и деформаций ползучести (необратимых). Развивающиеся вязкопластические области от таких зон отделяет движущаяся граница, на которой механизм производства необратимых деформаций меняется с

вязкого (ползучесть) на пластический (течение) при активном деформировании и наоборот при разгрузке. Постановки и решения таких задач с использованием теории больших деформаций рассматривались в работах [9–11].

Производство тепла за счёт необратимого деформирования и трения материала об ограничивающие его шероховатые поверхности в прямолинейных движениях упруговязкопластических сред (связанные краевые задачи теории больших деформаций) рассматривалось в работах [12–16].

Здесь рассмотрим связанные задачи термомеханического деформирования материала слоя с упругими, вязкими и пластическими свойствами, нижняя граница которого закреплена на наклонной плоскости. Параметры в выбранных определяющих законах ползучести и пластического течения зависят от температуры.

Будем использовать математическую модель упруговязкопластического деформирования [17; 18], в которой обратимые и необратимые деформации определяются дифференциальными уравнениями переноса [19; 20]. Отметим, что большинство численно-аналитических, включая точные, решений краевых задач теории больших упругопластических или упруговязкопластических деформаций было получено с использованием такой модели.

Основные модельные соотношения. Для рассматриваемого далее несжимаемого материала в прямоугольной декартовой системе координат, согласно [17; 18], справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
 \frac{Dm_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ij} + z_{ik}) m_{kj} + m_{ik} (\varepsilon_{kj} - \gamma_{ij} - z_{kj}) \right), \\
 \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{ij} - \gamma_{ij} p_{kj}, \quad m_{ij} = e_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \\
 d_{ij} &= m_{ij} + p_{ij} - m_{ik} m_{kj} / 2 - m_{ik} p_{kj} - p_{ik} m_{kj} + m_{ik} p_{ks} m_{sj}, \\
 \sigma_{ij} &= -P \delta_{ij} + \frac{1}{1 + 3\alpha (T - T_0)} \frac{\partial W}{\partial m_{ik}} (\delta_{kj} - m_{kj}), \\
 \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
 r_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij} (\varepsilon_{sk}, m_{sk}), \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u_i , v_i – соответственно компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; γ_{ij} – компоненты тензора скоростей необратимых деформаций p_{ij} ; m_{ij} – компоненты обратимой составляющей тензора полных деформаций Альманси d_{ij} ; α – коэффициент линейного расширения; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; P – добавочное гидростатическое давление.

Объективная производная по времени в (1) записана для произвольного симметричного тензора с компонентами n_{ij} . Кососимметричный тензор z_{ij} в [17; 18] выписан полностью. Для изотропного материала упругий потенциал W задаётся в форме

$$\begin{aligned}
 W &= -2\mu J_1 - \mu J_2 + b J_1^2 + (b - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + v_1 J_1 \theta + v_2 \theta^2 - v_3 J_1 \theta^2 - v_4 J_1^2 \theta - v_5 J_2 \theta - v_6 \theta^3 + \dots, \\
 J_1 &= c_{kk}, \quad J_2 = c_{ik} c_{ki}, \quad c_{ij} = m_{ij} - 0,5 m_{ik} m_{kj},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где μ – модуль сдвига; b , χ , v_s ($s = 1, 2, \dots, 6$) – термомеханические постоянные.

Определяющий накопление необратимых деформаций диссипативный механизм деформирования связан с пластическими и реологическими свойствами материалов. Чтобы его конкретизировать, нужно задать зависимость между компонентами тензора скоростей необратимых деформаций γ_{ij} и напряжениями в среде. Будем учитывать вязкие свойства среды на всех этапах процесса деформирования. Необратимые деформации p_{ij} накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и могут быть и деформациями ползучести, и пластическими

деформациями. Таким образом, в уравнениях переноса необратимые деформации не разделяются на свои составляющие, а их различие связано с разными механизмами накопления. В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности нагружения, полагаем, что скорости изменения необратимых деформаций равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v$.

Чтобы задать такое диссипативное деформирование, выберем степенной закон ползучести Нортона:

$$V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \Sigma = \max|\sigma_i - \sigma_j|, \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

где постоянные B и n – параметры ползучести материала; σ_i – главные напряжения.

В случае достижения напряжённым состоянием поверхности нагружения диссипативный механизм деформирования меняется и появляется область пластического течения. В таком случае примем, что $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$. Связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями, согласно принципу максимума Мизеса, устанавливается ассоциированным законом пластического течения:

$$\alpha_{ij} = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = 0, \quad \xi > 0, \quad \alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{v_0}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения.

В качестве условия пластичности выберем следующее обобщение функции нагружения Треска:

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = \max|\sigma_i - \sigma_j| - 2k + 2\eta \max|\alpha_k| = 0, \quad (5)$$

где k – предел текучести; η – коэффициент вязкости; α_k – главные значения тензора α_{ij} .

Не разделяя необратимые деформации на составляющие, считаем, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (3) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. При таком подходе также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с (3) на (4).

Для зависящих от температуры параметров ползучести B и n , предела текучести k и коэффициента вязкости η примем следующие зависимости [21; 22]:

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{RT_0(1+\theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0(1+\theta)}, \quad k = k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right)^2, \quad \eta = \eta_0 \text{Exp}(-\nu T_0 \theta), \quad (6)$$

где c_1 , σ_0 , b_1 и b_2 – параметры материала; Q – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная; k_0 , η_0 – соответственно предел текучести и вязкость при комнатной температуре; θ_m – температура плавления материала; ν – экспоненциальная скорость.

Если принять закон теплопроводности Фурье, то из уравнения баланса энтропии следует уравнение теплопроводности:

$$\left(1 + \frac{\beta_1}{\nu_2} \theta + \frac{\beta_2}{\nu_2} c_{ij}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3}{\nu_2} (\varepsilon_{ji} - \gamma_{ji}) c_{ij} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\sigma_{ij} \gamma_{ij}}{2\nu_2}, \quad (7)$$

$$\beta_1 = \nu_2(1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6, \quad \beta_2 = -\nu_3, \quad \beta_3 = -\nu_1 - \nu_5,$$

где q – коэффициент температуропроводности.

Необратимое деформирование плоского тяжёлого слоя на наклонной плоскости при его нагреве. Пусть тяжёлый слой высоты h несжимаемого упруговязкопластического материала расположен на наклонной плоскости (см. рис. 1) и его верхняя граница $x_2 = h$ подвергается нагреву. Полагаем, что в промежуток времени $0 < t < t_0$, пока пластическое течение отсутствует, краевые условия задачи имеют вид

$$u|_{x_2=0} = 0, \quad \theta|_{x_2=h} = G(t), \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_{22}|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = 0. \quad (9)$$

В условиях (8) $u = u_1(x_2)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений; $G(t)$ – заданная функция.

В рассматриваемом случае ненулевыми компонентами тензора деформаций Альманси будут компоненты

$$d_{12} = \frac{1}{2} u_{,2}, \quad d_{22} = -\frac{1}{2} u_{,2}^2, \quad u_{,2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}. \quad (10)$$

Для компонент напряжений из соотношений (1) и (2) с точностью до слагаемых первого порядка малости по m_{11} и m_{22} и второго – по m_{12} , найдём

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & -(P + 2\mu) - 2(\mu - (v_4 + 3b\beta)\theta)m_{12}^2 + 2(b - (v_4 + 3abT_0)\theta)(m_{11} + m_{22}) + (v_1 + 6\mu aT_0)\theta - \\ & - (v_3 + 3av_1T_0 + 18a^2T_0^2)\theta^2 = -p(t), \quad \sigma_{12} = 2(\mu - l\theta)m_{12}, \quad l = v_1 + v_5 + 3\mu aT_0, \\ \sigma_{11} = & -p(t) + 2(\mu - l\theta)m_{11} + (3\mu + l\theta)m_{12}^2, \quad \sigma_{22} = -p(t) + 2(\mu - l\theta)m_{22} + (3\mu + l\theta)m_{12}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

В рамках квазистатического подхода, интегрируя уравнения равновесия,

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho g_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho g_2 = 0, \quad g_1 = g \sin \varphi, \quad g_2 = -g \cos \varphi, \quad (12)$$

где ρ – плотность материала; g – ускорение свободного падения; φ – угол наклона плоскости, с использованием условий (9) и соотношений (10), получим распределение напряжений в слое:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \rho g_2(h - x_2) - f_1(t) + 2(\mu - l\theta)(m_{11} - m_{22}), \\ \sigma_{12} = & \rho g_1(h - x_2) + f_2(t), \quad \sigma_{22} = \rho g_2(h - x_2) - f_1(t), \\ \sigma_{33} = & -p_1(t) = \rho g_2(h - x_2) - f_1(t) - 2(\mu - l\theta)m_{22} - \frac{(3\mu + l\theta)(\rho g_1(h - x_2) + f_2(t))^2}{4(\mu - l\theta)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В соотношениях (13) и далее в соотношениях этого пункта $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$.

Считаем, что необратимые деформации первоначально накапливаются за счёт медленного процесса ползучести. Из (3) и (13), ограничиваясь слагаемыми до порядка n по напряжениям, получим отличные от нуля скорости деформаций ползучести:

$$\varepsilon_{12}^v = 2^{n-1} B n (\rho g_1(h - x_2) + f_2(t))^{n-1}, \quad \varepsilon_{11}^v = -\varepsilon_{22}^v = \frac{\varepsilon_{12}^v}{2} \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{12}}. \quad (14)$$

Уравнение теплопроводности (7) с учётом соотношений (10), (13) и (14) примет вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3}{2} \frac{\rho^2 g_1^2 l (h - x_2)^2}{(\mu - l\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + f_3(x_2, t), \quad f_3(x_2, t) = -\frac{2^{n-1} B n}{v_1} \rho^n g_1^n (h - x_2)^n. \quad (15)$$

Уравнение теплопроводности (15) при краевых условиях (8), начальном условии $\theta|_{t=0} = 0$ и с учётом зависимостей (6) решается численно. При расчётах функция $G(t)$ полагалась линейной: $G(t) = \gamma_1 t$, где γ_1 – заданная постоянная.

Кинематика среды в рассматриваемом случае задаётся соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{dd_{12}}{dt} = \frac{\partial d_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2} v' = \varepsilon_{12}^e + \gamma_{12} = \frac{\partial m_{12}}{\partial t} + \frac{\partial p_{12}}{\partial t}, \quad r_{21} = -r_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}(1-m_{22})}{m_{11} + m_{22} - 2}, \\ \gamma_{11} &= \frac{dp_{11}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \varepsilon_{12}^p), \quad \gamma_{22} = \frac{dp_{22}}{dt} + 2p_{12}(r_{12} + \gamma_{12}), \quad \gamma_{11} = -\gamma_{22} = \frac{\gamma_{12}}{2} \frac{m_{11} - m_{22}}{m_{12}}, \end{aligned} \quad (16)$$

в которых скорости необратимых деформаций равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{11} = \varepsilon_{11}^v$, $\gamma_{12} = \varepsilon_{12}^v$ и $\gamma_{22} = \varepsilon_{22}^v$. Используя соотношения (11), (13) и (16), найдём компоненты обратимых и необратимых деформаций m_{12} и p_{12} и перемещения точек слоя:

$$m_{12} = \frac{\rho g_1 (h - x_2) + f_2(t)}{2(\mu - \theta)}, \quad p_{12} = \int_0^t \gamma_{12} dy, \quad u_{,2} = 2(m_{12} + p_{12}). \quad (17)$$

Неизвестные компоненты обратимых деформаций m_{11} , m_{22} и необратимых деформаций p_{11} , p_{22} связаны системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial t} &= \gamma_{12} \left(m_{12} - \frac{p_{11}}{m_{12}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{12}^e + \gamma_{12}) p_{12}}{2 + m_{12}^2} \left(1 + p_{11} - \frac{m_{12}^2}{2} - 2m_{12} p_{12} \right), \\ p_{22} &= -p_{11} - 2p_{12}^2, \quad m_{22} = p_{11} - 3m_{12}^2/2 - 2m_{12} p_{12}, \quad m_{11} = -m_{22} - m_{12}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

при $\gamma_{12} = \varepsilon_{12}^v$.

Согласно (5), условие пластичности впервые выполнится на нижней границе слоя $x_2 = 0$ в форме $\sigma_{12}|_{x_2=0} = k(t_0)$. Из данного условия следует уравнение

$$\rho g_1 h = k_0 (1 - \theta(0, t_0) \theta_m^{-1})^2$$

для определения момента начала вязкопластического течения t_0 .

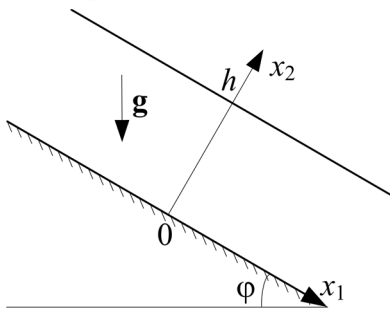


Рис. 1. Тяжёлый слой на наклонной плоскости

С момента времени t_0 от нижней границы $x_2 = 0$ развивается область течения, занимающая слой $0 \leq x_2 \leq r(t)$, а в слое $r(t) \leq x_2 \leq h$ материал деформируется вязкоупруго. Таким образом $x_2 = r(t)$ – движущаяся граница области вязкопластического течения.

Из уравнений равновесия (12) и условий непрерывности напряжений на упругопластической границе $x_2 = r(t)$ следует, что напряжения как в области $r(t) \leq x_2 \leq h$, так и в области течения $0 \leq x_2 \leq r(t)$ определяются из зависимостей (13). Уравнение теплопроводности (14) теперь справедливо в области $r(t) \leq x_2 \leq h$.

Из условий (4), (5) и соотношений (13) найдём компоненту скорости пластической деформации ε_{12}^p :

$$\varepsilon_{12}^p = \eta^{-1} \left(\rho g_1 (h - x_2) + f_2(t) - k_0 (1 - \theta \theta_m^{-1})^2 \right) + \varepsilon_{12}^{v_0}. \quad (19)$$

Учитывая, что $\varepsilon_{12}^p = \varepsilon_{12}^{v_0}$ на границе $x_2 = r(t)$, из (19) получим уравнение для определения положения этой границы:

$$\rho g_1(h-r(t)) = k_0(1-\theta(r(t),t)\theta_m^{-1})^2. \quad (20)$$

Уравнение теплопроводности (7) в области течения с учётом соотношений (13) и (19) принимает форму (15) с функцией

$$f_3(x_2, t) = -\frac{\rho g_1(h-x_2)}{\nu_1 \eta} \left(\rho g_1(h-x_2) - k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m} \right)^2 \right) - \frac{\rho g_1(h-x_2)}{\nu_1} \varepsilon_{12}^{\nu_0}.$$

Для температуры θ выполняются граничные условия (8). Также примем, что непрерывна искомая функция θ и её производная $\partial\theta/\partial x_2$ на упругопластической границе $x_2 = r(t)$ и непрерывна температура в момент начала пластического течения t_0 . Уравнения (15) и (20) решались конечно-разностным методом. В области вязкопластического течения справедливы соотношения (16)-(18) при $\gamma_{11} = \varepsilon_{11}^p$, $\gamma_{12} = \varepsilon_{12}^p$ и $\gamma_{22} = \varepsilon_{22}^p$.

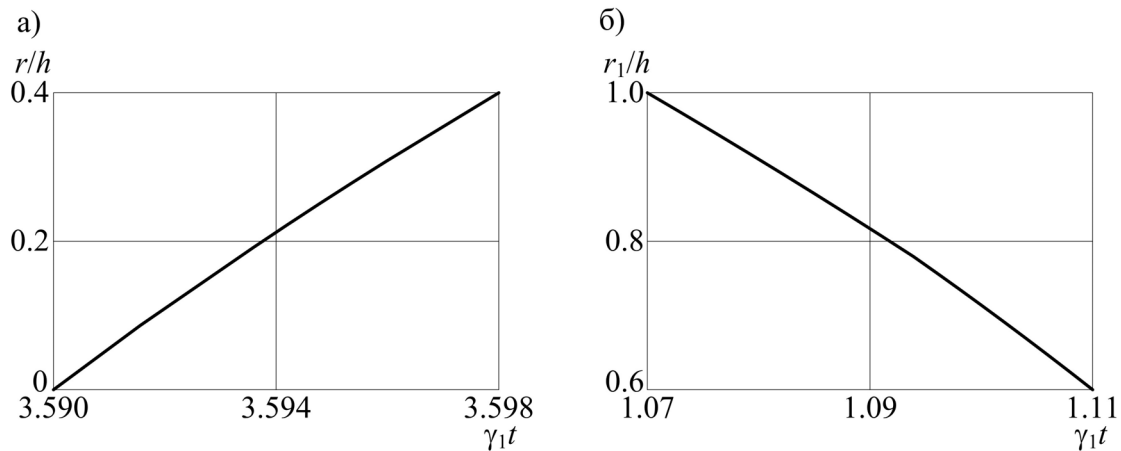


Рис. 2. Графики упругопластических границ

На рис. 2, а показана зависимость упругопластической границы $r(t)/h$ от безразмерного времени $\gamma_1 t$.

Необратимое деформирование плоского тяжёлого слоя на наклонной плоскости при его нагреве и нагружении. Пусть теперь к тяжёлому слою (см. рис. 1), помимо тепловой нагрузки (8), прилагается ещё и механическая:

$$\sigma_{22}|_{x_2=h} = -f_1(t), \quad \sigma_{12}|_{x_2=h} = f_2(t), \quad (21)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ – заданные возрастающие функции сжимающей и сдвиговой нагрузки соответственно.

Интегрируя уравнения равновесия (12) с использованием условий (21) и соотношений (11), получим, что напряжения в слое в рассматриваемом случае удовлетворяют зависимостям (13) с заданными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Для скоростей деформаций ползучести выполняются соотношения (14).

Уравнение теплопроводности (7) в этом случае принимает форму

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l}{2} \frac{(\rho g_1(h-x_2) + f_2(t))^2}{(\mu - l\theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \frac{\beta_3}{2} \frac{\dot{f}_2(t)(\rho g_1(h-x_2) + f_2(t))}{(\mu - l\theta)^2} + f_4(x_2, t), \quad (22)$$

$$f_4(x_2, t) = -\frac{2^{n-1} B n}{\nu_2} (\rho g_1(h-x_2) + f_2(t))^n.$$

Для компонент тензоров обратимых и необратимых деформаций m_{12} и p_{12} , а также для градиента перемещений точек слоя выполняются зависимости (17). Перемещения точек материала находятся интегрированием последнего уравнения (17) с использованием первого краевого условия (8). Компоненты обратимых деформаций m_{11} , m_{22} и необратимых деформаций p_{11} , p_{22} связаны системой уравнений (18), в которой $\gamma_{12} = \varepsilon_{12}^v$.

Из соотношения (5) следует, что в некоторый момент времени $t = t_1$ условие пластичности впервые выполнится на верхней границе слоя $x_2 = h$ в форме $\sigma_{12}|_{x_2=h} = k(t_0)$. Из данного условия получим уравнение для определения момента начала вязкопластического течения t_1 :

$$f_2(t_1) = k_0 \left(1 - \theta(h, t_1) \theta_m^{-1}\right)^2.$$

С этого момента времени от верхней границы слоя $x_2 = h$ начинает развиваться область вязкопластического течения $r_1(t) \leq x_2 \leq h$. При этом в области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ материал продолжает деформироваться вязкоупруго. Движущаяся граница $x_2 = r_1(t)$ отделяет область течения от области, в которой необратимые деформации продолжают накапливаться за счёт процесса ползучести.

Из уравнений равновесия (12), а также условий непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе $x_2 = r_1(t)$ следует, что напряжения в областях $r_1(t) \leq x_2 \leq h$ и $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$ определяются зависимостями (13).

Соотношение для компоненты ε_{12}^p тензора скоростей пластических деформаций имеет вид (19). Учитывая, что на границе области вязкопластического течения $x_2 = r_1(t)$ скорость пластических деформаций ε_{12}^p совпадает со скоростью деформаций ползучести ε_{12}^v , из (19) получим уравнение для определения положения этой границы:

$$\rho g_1(h - r_1(t)) + f_2(t) = k_0 \left(1 - \theta(r_1(t), t) \theta_m^{-1}\right)^2. \quad (23)$$

Уравнение теплопроводности (22) продолжает выполняться в области $0 \leq x_2 \leq r_1(t)$. А в области течения $r_1(t) \leq x_2 \leq h$ уравнение теплопроводности (7) с учётом соотношений (13) и (19) принимает вид (22) с функцией

$$f_4(x_2, t) = -\frac{(\rho g_1(h - x_2) + f_2(t))}{v_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(\rho g_1(h - x_2) + f_2(t) - k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right)^2 \right) + \varepsilon_{12}^{v_0} \right).$$

Уравнения (22) и (23) также решались конечно-разностным методом. В области течения $r_1(t) \leq x_2 \leq h$ остаются верными зависимости (16)-(18) при $\gamma_{11} = \varepsilon_{11}^p$, $\gamma_{12} = \varepsilon_{12}^p$ и $\gamma_{22} = \varepsilon_{22}^p$.

Рис. 2, б иллюстрирует зависимость упругопластической границы $r_1(t)/h$ от безразмерного времени $\gamma_1 t$.

Заключение. В данной работе получены решения неизотермических краевых задач о ползучести и вязкопластическом течении в материале плоского тяжёлого слоя на наклонной плоскости. В первом случае рассматривается задача только при нагревании верхней границы тяжёлого слоя. Во второй задаче, помимо тепловой нагрузки, к верхней границе слоя прилагается ещё и сдвиговая и сжимающая нагрузки. В первой задаче вязкопластическое течение в материале возникает и развивается в окрестности нижней границы слоя, в то время как во второй – в окрестности верхней границы слоя. То есть приложение механической нагрузки, помимо тепловой, существенно изменяет деформационную картину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мясников, В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды / В. П. Мясников // Прикладная механика и техническая физика. – 1961. – № 2. – С. 79-86.
2. Мосолов, П. П. Механика жёсткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
3. Быковцев, Г. И. О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления / Г. И. Быковцев, А. Д. Чернышов // Прикладная механика и техническая физика. – 1964. – № 4. – С. 94-96.
4. Ковтанюк, Л. В. О продавливании упруговязкопластического материала через жёсткую круговую цилиндрическую матрицу / Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 400. – № 6. – С. 764-766.
5. Буренин, А. А. Развитие и торможение прямолинейного осесимметричного вязкопластического течения и упругое последствие после его остановки / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. Л. Мазелис // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51. – № 2. – С. 140-147.
6. Буренин, А. А. Об упругих деформациях и вязкопластическом течении в тяжёлом слое, помещённом на наклонной плоскости / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2010. – № 2. – С. 158-170.
7. Буренин, А. А. Переходный процесс торможения прямолинейного вязкопластического течения при мгновенном снятии нагружающих усилий / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, А. В. Лушпей // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73. – № 3. – С. 494-500.
8. Олейников, А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш. – М.: Эком, 2009. – 109 с.
9. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278.
10. Prokudin, A. N. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium / A. N. Prokudin, S. V. Firsov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2018. – V. 11. – I. 4. – P. 399-410.
11. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties / A. S. Begun, A. A. Burenin, L. V. Kovtanyuk, A. O. Lemza // Archive of Applied Mechanics – 2020. – V. 90. – I. 4. – P. 829-845.
12. Буренин, А. А. Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 464. – № 3. – С. 284-287.
13. Буренин, А. А. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счёт трения о шероховатую плоскость / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56. – № 4 (332). – С. 101-111.
14. Буренин, А. А. Деформирование и разогрег упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счёт изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 6-18.
15. Буренин, А. А. Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при её нагреве за счёт пристеночного трения / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80. – № 2. – С. 265-275.
16. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199-201.
17. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
18. Буренин, А. А. Моделирование больших упруговязкопластических деформаций с учётом теплофизических эффектов / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2010. – № 4. – С. 107-120.
19. Быковцев, Г. И. Конечные деформации упругопластических сред / Г. И. Быковцев, А. В. Шитиков // Доклады Академии наук СССР. – 1990. – Т. 311. – № 1. – С. 59-62.
20. Мясников, В. П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях / В. П. Мясников // Вестник ДВО РАН. – 1996. – № 4. – С. 8-13.
21. Alain, I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – I. 33. – P. 3201-3206.
22. Pla, F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // PhysicaD : Nonlinear Phenomena. – 2009. – Vol. 238, Iss. 5. – P. 572-580.