

МАШИНОСТРОЕНИЕ
MECHANICAL ENGINEERING

Буренин А. А., Комаров О. Н.
A. A. Burenin, O. N. Komarov

ИНСТИТУТУ МАШИНОВЕДЕНИЯ И МЕТАЛЛУРГИИ 30 ЛЕТ

30th ANNIVERSARY OF MACHINERY AND METALLURGY INSTITUTE

Буренин Анатолий Александрович – член-корреспондент Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: mail@imim.ru.
Mr. Anatoliy A. Burenin – Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Principal researcher of the Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: mail@imim.ru.

Комаров Олег Николаевич – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru.

Mr. Oleg N. Komarov – PhD in Engineering, Associate professor, Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru.

Аннотация. Федеральному государственному бюджетному учреждению науки Институту машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук 12 июля 2018 г. исполняется 30 лет со дня основания. За время своего существования и плодотворной деятельности организацией проведена большая научно-исследовательская работа, позволившая модернизировать ряд технологических процессов на предприятиях Дальневосточного региона; значительно обогатилось новыми именами научное сообщество. Небольшой институт играет важную роль в формировании стратегии развития в различных областях науки.

Summary. The Federal State Budgetary Institute of Science of the Machinery and Metallurgy Institute of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences on July 12, 2018 marks the 30th anniversary. During its existence and fruitful activity the organization carried out a large research work, which allowed to modernize a number of technological processes at the enterprises of the Far Eastern region, the scientific community has considerably enriched and added new names. A small institute plays an important role in shaping the development strategy in various fields of science.

Ключевые слова: институт, диссертация, инжиниринг, направление исследований, металлургия, машиноведение, фундаментальные задачи машиностроения.

Key words: institute, thesis, engineering, research direction, metallurgy, machine science, fundamental engineering tasks.

УДК 001

Тридцать лет прошло со дня основания Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук. Институт машиноведения и металлургии был создан 12 июля 1988 г. постановлением президиума Дальневосточного отделения Академии наук СССР № 90-а на базе институтов горного дела и Вычислительного центра Дальневосточного отделения Академии наук (ДВО АН СССР). Директором-организатором был назначен талантливый учёный, педагог, заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор технических наук

Анатолий Демьянович Верхотуров. Им были созданы перспективные научные коллективы, намечены основные направления исследований, направленные на решение целого ряда непростых организационных вопросов в г. Комсомольске-на-Амуре и в г. Хабаровске. После разделения ресурсов организаций, на базе которых Институт машиноведения и металлургии изначально был создан, постановлением президиума собрания народных депутатов г. Комсомольска-на-Амуре в 1991 году Институт машиноведения и металлургии получил окончательную прописку в городе.

Создание академического института в промышленной столице Дальнего Востока г. Комсомольска-на-Амуре преследовало следующие цели: получение фундаментальных и инженерно-технологических результатов в машиностроении и металлургии, необходимость которых определяется нуждами предприятий города и региона; повышение квалификационного роста и творческой активности инженерно-технических работников промышленных предприятий, связанных с деятельностью академических учёных и профессорско-преподавательских кадров высших учебных заведений, влияющих на повышение уровня образования в целом. Такие ожидания во многом оказались оправданными. Намеченные приоритеты благотворно повлияли на ряд творческих инженеров и преподавателей, что ознаменовалось защитой ряда докторских диссертаций таких учёных-исследователей, как Ю. Л. Иванов, Б. Н. Марьин, В. М. Козин, А. И. Хромов, К. А. Макаров, В. И. Шпорт, В. В. Черномас и других (сложно перечислить все защищённые кандидатские диссертации). Исследователи Института вливались в преподавательские коллективы вузов города, а преподаватели и студенты привлекались к исследованиям в Институте. Налаживалось и крепло сотрудничество сотрудников Института с инженерами предприятий, способствующее их взаимному творческому обогащению, и, следовательно, их взаимному квалификационному росту. Если остановиться только на этом, то помимо результатов исследовательских работ сотрудников Института [1] (с ними можно ознакомиться в недавней публикации), уже создание академического института в городе можно признать дальновидным шагом со стороны Президиума ДВО АН СССР. Всё ли в таком сотрудничестве гладко и успешно? Конечно, не всё задуманное воплощено, но Институт, безусловно, является важной творческой единицей города и способствует созданию атмосферы поиска, культуры инициативного образования, почтения к учителям и заботы об обучающихся.

Институт машиноведения и металлургии, несмотря на его малочисленность, заметен на академической карте России. Имеется ряд направлений исследований, где он находится в числе лидеров в стране и тем самым становится значимым для г. Комсомольска-на-Амуре. По ряду технических и физико-математических направлений и специальностей защитить диссертации на Дальнем Востоке можно только в Комсомольске-на-Амуре, являющемся главным, определяющим центром соответствующих исследований в регионе. Другие города и регионы, включая Москву, Санкт-Петербург, Новосибирск, предпочитают с целью получения заключения о результатах исследований, включая подготовленные диссертации, обращаться именно в г. Комсомольск-на-Амуре. Такое положение сложилось благодаря наличию в городе академического института. Учёные и сотрудники Института трудятся не только на благо, значимость и процветание своего учреждения, но и города в целом.

Институту машиноведения и металлургии 30 лет, но его исследовательский коллектив достаточно молод, квалифицирован, целеустремлён и признан в стране. Перспективы Института во многом определяются тем, что это единственный академический институт на Дальнем Востоке, занимающийся решением фундаментальных задач машиностроения, механики материалов и конструкций; исследованием и решением проблем прочности и разрушения, механики природных и техногенных процессов. Практически каждый объект жизнеобеспечения является объектом изучения в рамках основных научных направлений Института. Таким образом, перспективы Института неразрывно связаны с перспективами развития Дальнего Востока. Пока будут работать заводы, стройки, добывающие и обрабатывающие предприятия, – будет необходим и Институт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жилин, С. Г. К 30-летию юбилею Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук / С. Г. Жилин, О. Н. Комаров // История науки и техники. – 2018. – № 6. – С. 3-10.



Роговой А. А., Столбова О. С.
A. A. Rogovoi, O. S. Stolbova

КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В СПЛАВАХ И ПОЛИМЕРАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

FINAL DEFORMATIONS IN ALLOYS AND POLYMERS WITH MEMORY OF THE SHAPE

Роговой Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твёрдого тела Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (Россия, Пермь); 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел.: + 7 (342) 237-84-61. E-mail: rogovoy@icmm.ru.

Mr. Anatoliy A. Rogovoi – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Laboratory of Nonlinear Mechanics of Solids, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Perm); 614013, Perm, 1 Academician Korolev str.; tel.: + 7 (342) 237-84-61. E-mail: rogovoy@icmm.ru.

Столбова Ольга Серафимовна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории нелинейной механики деформируемого твёрдого тела Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (Россия, Пермь); 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел.: + 7 (342) 237-84-61. E-mail: sos@icmm.ru.

Ms. Olga S. Stolbova – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Perm); 614013, Perm, 1 Academician Korolev str.; tel.: + 7 (342) 237-84-61. E-mail: sos@icmm.ru.

Аннотация. В рамках больших деформаций предлагаются математические модели поведения сплавов, ферромагнитных материалов и полимеров с памятью форм, кинетические и определяющие уравнения которых удовлетворяют принципам объективности и термодинамики. Приведена вариационная формулировка краевых задач. Соотношения модели иллюстрируются решением задач о конечных деформациях простейших конструкций при прямом и обратном аустенитно-мартенситном фазовом переходе в сплавах и ферросплавных материалах с памятью формы и релаксационном переходе из высокоэластичного состояния в застеклованное в полимерах с памятью форм.

Summary. Within the framework of large deformations, mathematical models of the behavior of alloys, ferromagnetic materials and polymers with shape memory are proposed, the kinetic and determining equations of which satisfy the principles of objectivity and thermodynamics. A variation formulation of boundary value problems is given. The model relationships are illustrated by the solution of problems on finite deformations of the simplest structures with a direct and inverse austenitic martensitic phase transition in alloys and ferroalloy materials with shape memory and a relaxation transition from a highly elastic state to vitrified in polymers with shape memory.

Ключевые слова: конечные деформации, определяющие уравнения, память формы, фазовый переход, релаксационный переход, сплавы, полимеры, перестройка структуры, кристаллическая решётка, функция отклика материала.

Key words: finite deformations, determining equations, shape memory, phase transition, relaxation transition, alloys, polymers, structure rearrangement, crystal lattice, material response function.

УДК 539.3

Сплавы и полимеры, в которых наблюдается эффект памяти формы, относятся к классу функциональных материалов. Такие материалы могут контролируемым образом изменять свои свойства в ответ на воздействие различных внешних полей, например: температурного, электрического или магнитного. Эффект памяти формы (ЭПФ) связан с перестройкой структуры, происходящей в материале при изменении инициирующих полей в определённой области, причём новая структура, возникшая при изменении поля в одном направлении (прямой переход), возвращается к своему прообразу при обратном изменении поля (обратный переход).

Механизмы возникновения новой структуры у разных материалов могут быть разными. В сплавах с памятью формы (СПФ) под действием температурных и (или) силовых полей преобразуется кристаллическая решётка, что приводит к дополнительным фазовым деформациям [10].

В ферромагнитных сплавах с памятью формы (ФСПФ) (сплавы Гейслера) преобразование кристаллической решётки может происходить также при приложении магнитного поля [1]. В полимерах с памятью формы (ППФ) в процессе релаксационного перехода из высокоэластичного состояния в застеклованное (охлаждение материала) деформация, имеющаяся в высокоэластичной фазе, «замораживается» в момент перехода, и деформации, возникающие в застеклованной фазе при дальнейшем деформировании, накладываются на эти «замороженные». При нагревании последние постепенно «размораживаются» [11].

Для описания поведения сплавов и полимеров с памятью формы используется подход, представленный в работе [12]. В рамках данного подхода строятся корректные соотношения, удовлетворяющие принципам термодинамики и объективности, позволяющие описать поведение сложных сред в рамках конечных деформаций. Основная идея подхода состоит в том, что рассматриваемый упруго-неупругий процесс трактуется как упругий с напряжённой отсчётной конфигурацией. В качестве последней принимается промежуточная упругая конфигурация κ_* , близкая к текущей κ и получающаяся из последней при малой упругой разгрузке. Формализацией указанной близости является введение малого положительного параметра ε у вектора перемещения \mathbf{u} , определяющего положение точек в текущей конфигурации по отношению к промежуточной. Это позволяет представить все кинематические величины в виде рядов по этому малому параметру с удержанием только линейных слагаемых и, в результате, построить для любого закона упругости определяющие уравнения с начальными напряжениями и функциями отклика материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации.

1. Основные соотношения при конечных деформациях

В соответствии с рассматриваемым подходом градиент места в текущем состоянии \mathbf{F} запишется через градиент места относительно промежуточной конфигурации \mathbf{F}_* в виде $\mathbf{F} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_*$, где $\mathbf{h} = (\nabla_* \mathbf{u})^T$ – градиент вектора перемещений \mathbf{u} из промежуточной конфигурации κ_* в близкую текущую κ ; ∇_* – оператор Гамильтона в промежуточной конфигурации; \mathbf{g} – единичный тензор. Тогда мера $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ и тензор $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{g})/2$ деформации Коши – Грина относительно конфигурации κ_* запишутся следующим образом:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_* \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_* + \varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_* = \mathbf{E}_* + \Delta \mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\mathbf{e} = (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)/2$ – тензор малых деформаций относительно промежуточной конфигурации. В результате предельного перехода при стремлении промежуточной конфигурации к текущей ($\kappa_* \rightarrow \kappa$) из соотношений (1) следует, что

$$\dot{\mathbf{C}} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F},$$

где \mathbf{D} – тензор деформации скорости, совпадающий в данном случае с тензором скорости деформаций $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{e}}$. Отметим, что $\dot{\mathbf{C}} = 2 \dot{\mathbf{E}}$.

Определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющего принципу объективности [2], может быть представлено в нескольких эквивалентных формах. В данной работе удобнее всего использовать следующую форму: $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}_E, \Theta) \cdot \mathbf{F}^T$. Поскольку $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}_E, \Theta)$ – функция отклика материала на упругую деформацию $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ – совпадает со вторым (симметричным) тензором напряжений Пиола – Кирхгоффа ($\tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{P}_{II}$), который, в свою очередь, в теории упругости определяется через упругий потенциал $W(\mathbf{C}_E)$: $\mathbf{P}_{II} = 2(\partial W / \partial \mathbf{C}_E)$; \mathbf{T} – тензор истинных напряжений; $J = I_3(\mathbf{F})$ – третий инвариант градиента места \mathbf{F} ; Θ – абсолютная температура.

Относительно промежуточной конфигурации с точностью до линейных по ε слагаемых имеем

$$\mathbf{P}_{II} = \tilde{\mathbf{P}}_{II*} + \tilde{\mathbf{L}}_*^{IV} \cdot \Delta \mathbf{E}_E = \mathbf{P}_{II*} + \mathbf{L}_*^{IV} \cdot \Delta \mathbf{e}_E, \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{L}}_*^{IV}$ и \mathbf{L}_*^{IV} – тензоры четвёртого ранга, определяющие отклик материала на приращение упругих деформаций, которые можно получить, задавая упругий потенциал $W(\mathbf{C}_E)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_*^{IV} &= 4 \left. \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \right|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} = 2 \left. \frac{\partial \mathbf{P}_{II}(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E} \right|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}}, \\ \mathbf{L}_*^{IV} &= 4 \mathbf{F}_*^{\circ 3} \left. \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \right|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} \cdot \mathbf{F}_*^T = 2 \mathbf{F}_*^{\circ 3} \left. \frac{\partial \mathbf{P}_{II}(\mathbf{C}_E, \Theta_*)}{\partial \mathbf{C}_E^2} \right|_{\mathbf{C}_E = \mathbf{C}_{E*}} \cdot \mathbf{F}_*^T, \end{aligned} \quad (3)$$

где \circ^3 – позиционное скалярное умножение тензора второго ранга слева на третий базисный вектор тензора четвёртого ранга [3].

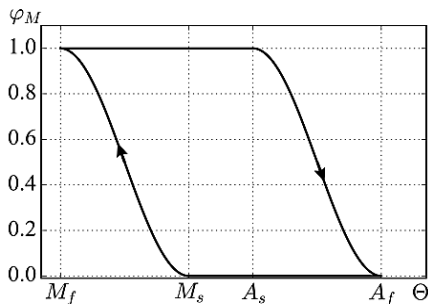
В результате предельного перехода $\kappa_* \rightarrow \kappa$ в соотношении (2) получаем $\dot{\mathbf{P}}_{II} = \tilde{\mathbf{L}}_*^{IV} \cdot \dot{\mathbf{E}}_E = \mathbf{L}_*^{IV} \cdot \mathbf{D}_E$.

2. Кинематика фазового и релаксационного переходов

Для описания фазового перехода в СПФ и ФСПФ вводится скалярная внутренняя переменная φ_M – объёмная доля мартенситной фазы в материале, которая изменяется от 0 в полностью аустенитном (высокотемпературном) состоянии до 1 в полностью мартенситном (низкотемпературном) состоянии. Для релаксационного перехода в ППФ в качестве внутреннего параметра выступает φ_g – степень стеклования ($\varphi_g = 0$ – в высокоэластичном/высокотемпературном состоянии; $\varphi_g = 1$ – в застеклованном/низкотемпературном состоянии).

На рис. 1 представлены типовые диаграммы фазового (см. рис. 1, а) и релаксационного (см. рис. 1, б) переходов. Необходимо отметить, что прямой и обратный фазовые переходы осуществляются при различных температурах: интервал температур $M_s \rightarrow M_f$ соответствует переходу «аустенит – мартенсит»; интервал температур $A_s \rightarrow A_f$ соответствует переходу «мартенсит – аустенит». При этом в нагруженном материале происходит сдвиг критических температур. График зависимости степени стеклования от температуры при прямом и обратном релаксационных переходах имеет единый вид. Значение $\Theta_l \leq \Theta \leq \Theta_h$ определяет переходную область между застеклованным состоянием (при температуре ниже Θ_l) и высокоэластичным (при температуре выше Θ_h), а Θ_g – характеристическая температура стеклования.

а)



б)

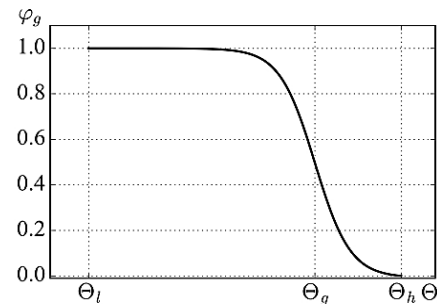


Рис. 1. Зависимости от температуры: а – объёмной доли мартенситной фазы; б – степени стеклования

Зависимость φ_M от Θ может быть аппроксимирована различными соотношениями. Так, в работе А. А. Мовчана [4]

$$\varphi_M(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0; \\ 0,5(1 - \cos(\pi \xi)), & 0 < \xi < 1; \\ 1, & \xi \geq 1. \end{cases} \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{M_s^\sigma - \Theta}{M_s^\sigma - M_f^\sigma}, \quad M_f^\sigma \leq \Theta \leq M_s^\sigma (d\varphi_M > 0); \\ \xi &= 1 + \frac{A_s^\sigma - \Theta}{A_f^\sigma - A_s^\sigma}, \quad A_s^\sigma \leq \Theta \leq A_f^\sigma (d\varphi_M < 0). \end{aligned}$$

Здесь M_s, M_f, A_s, A_f – температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситных превращений в свободном от напряжений материале; $M_s^\sigma, M_f^\sigma, A_s^\sigma, A_f^\sigma$ – эти же температуры в нагруженном материале и (или) в приложенном магнитном поле.

В некоторых случаях удобнее использовать соотношение, предложенное в работе Г. А. Малыгина [5]: $\varphi_M(\Theta) = \left(1 + \exp\left(B \frac{\Theta - \Theta_C}{\Theta_C}\right)\right)^{-1}$, где $\Theta_C = M_C = (M_s + M_f)/2$ – для прямого мартенситного превращения; $\Theta_C = A_C = (A_s + A_f)/2$ – для обратного; B – параметр, определяющий размытие перехода по температуре.

Если фазовый переход происходит в нагруженном материале и (или) в магнитном поле, характерные температуры фазового перехода сдвигаются согласно соотношению Клаузиуса – Клапейрона [13]: $\Theta_C = \Theta_{C0} + \frac{\Theta_{C0}}{[q]} (P_{II} \cdot [E_{ph}] + \mu_0 H \cdot [M])$.

Здесь H – вектор напряжённости магнитного поля; $[E_{ph}]$, $[M]$ и $[q]$ – изменение фазовых деформаций, намагничённости и выделившееся (поглощённое) тепло в процессе фазового перехода; μ_0 – магнитная постоянная.

Зависимость φ_g от Θ аппроксимируется следующим соотношением [14]:

$$\varphi_g(\Theta) = 1 - 1 / (1 + a(\Theta_h - \Theta)^4). \quad (4)$$

Возможен вариант аппроксимации, предложенный в работе [15]:

$$\varphi_g(\Theta) = \frac{\tanh((\Theta_h - \Theta_g)/b) - \tanh((\Theta - \Theta_g)/b)}{\tanh((\Theta_h - \Theta_g)/b) - \tanh((\Theta_l - \Theta_g)/b)}. \quad (5)$$

В соотношениях (4) и (5) a и b – параметры материала.

Поскольку в СПФ и ФСПФ имеет место фазовый переход «аустенит – мартенсит», определим кинематику процесса градиентами места F_A для аустенитной фазы и F_M для мартенситной, тогда $C_A = F_A^T \cdot F_A$, $C_M = F_M^T \cdot F_M$, $E_A = (C_A - g)/2$, $E_M = (C_M - g)/2$. Кинематическое соотношение может быть представлено в следующем виде [13]:

$$\dot{E} = (\varphi_A E_A)^{\bullet} + (\varphi_M E_M)^{\bullet} + \dot{E}_{ph} + \dot{E}_p + \dot{E}_\Theta, \quad (6)$$

где $\varphi_A = 1 - \varphi_M$ – объёмная доля аустенитной фазы в материале (отметим, что $\dot{\varphi}_A = -\dot{\varphi}_M$), а \dot{E}_{ph} , \dot{E}_p и \dot{E}_Θ – скорости изменения фазовых, пластических и температурных деформаций.

Скорость изменения фазовых деформаций зададим, обобщая соотношения, предложенные в работе [4] для малых деформаций, на случай конечных.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_{Ph} &= \tilde{\mathbf{E}}_{Ph} \dot{\phi}_M = (a\mathbf{g} + b\tilde{\mathbf{P}}_{II} + c\mathbf{E}_{Ph}) \dot{\phi}_M, \quad \dot{\phi}_M > 0; \\ \dot{\mathbf{E}}_{Ph} &= \tilde{\mathbf{E}}_{Ph} \dot{\phi}_M = \left(\frac{c\mathbf{E}_{Ph}^{(0)}}{\exp(c\phi_M^{(0)}) - 1} + c\mathbf{E}_{Ph} \right) \dot{\phi}_M, \quad \dot{\phi}_M < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь a, b, c – параметры материала; $\tilde{\mathbf{P}}_{II}$ – девиатор тензора \mathbf{P}_{II} ; $\phi_M^{(0)}$ и $\mathbf{E}_{Ph}^{(0)}$ – значения параметра мартенситной фазы и фазовой деформации в начальной точке процесса обратного превращения.

Скорости изменения пластических и температурных деформаций зададим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_p &= 3\dot{\sigma}_i / (2H\sigma_i) (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}), \quad \sigma_i \geq \sigma_T; \\ \dot{\mathbf{E}}_\Theta &= \alpha \dot{\Theta} \mathbf{C} = \alpha \dot{\Theta} (2\mathbf{E} + \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (8)$$

где \mathbf{S} – девиатор тензора истинных напряжений \mathbf{T} ; σ_i – интенсивность напряжений; σ_T – предел текучести; H – модуль пластического упрочнения; α – коэффициент линейного теплового расширения.

Для ППФ кинематику процесса определим градиентами места \mathbf{F}_r в высокоэластичном состоянии и \mathbf{F}_g в застеклованном. В этом случае $\mathbf{C}_r = \mathbf{F}_r^T \cdot \mathbf{F}_r$, $\mathbf{C}_g = \mathbf{F}_g^T \cdot \mathbf{F}_g$, $\mathbf{E}_r = (\mathbf{C}_r - \mathbf{g}) / 2$, $\mathbf{E}_g = (\mathbf{C}_g - \mathbf{g}) / 2$ и кинематическое соотношение представляется в виде [6]

$$\dot{\mathbf{E}} = (\varphi_r \mathbf{E}_r)^\bullet + (\varphi_g \mathbf{E}_g)^\bullet + \dot{\mathbf{E}}_f + \varphi_g \dot{\mathbf{E}}_v + \dot{\mathbf{E}}_\Theta, \quad (9)$$

где $\varphi_r = 1 - \varphi_g$ – объёмная доля высокотемпературной фазы в процессе стеклования (отметим, что $\dot{\varphi}_r = -\dot{\varphi}_g$); $\dot{\mathbf{E}}_f$ – скорость «замораживания» высокоэластичных деформаций в процессе стеклования и «размораживания» в процессе расстекловывания; $\dot{\mathbf{E}}_v$ – скорость изменения вязких деформаций (вязкое поведение учитывается только в застеклованном состоянии).

Следуя [5], определим $\dot{\mathbf{E}}_f$ следующим соотношением:

$$\dot{\mathbf{E}}_f = \tilde{\mathbf{E}}_f \dot{\phi}_g = \begin{cases} \dot{\phi}_g \mathbf{E}_r, & \dot{\Theta} < 0; \\ (\dot{\phi}_g / \varphi_g) \mathbf{E}_f, & \dot{\Theta} > 0; \\ \mathbf{0}, & \dot{\Theta} = 0. \end{cases}$$

Скорость изменения вязких деформаций зададим в виде $\dot{\mathbf{E}}_v = \eta^{-1} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F})$, где η – коэффициент вязкости.

3. Термодинамические соотношения

Определим требования, которые накладывает термодинамика на рассматриваемые процессы. Представим свободную энергию Ψ для материалов с памятью формы в виде суммы свободных энергий аустенитной и мартенситной фаз (Ψ_A и Ψ_M) или высокоэластичного и застеклованного состояний (Ψ_r и Ψ_g) со своими весовыми коэффициентами, температурной Ψ_Θ и магнитной Ψ_{Mg} энергиями:

а) для СПФ – $\Psi = \varphi_M(\Theta)\Psi_M(\mathbf{C}_M) + \varphi_A(\Theta)\Psi_A(\mathbf{C}_A) + \Psi_\Theta(\Theta)$;

б) для ФСПФ – $\Psi = \varphi_M(\Theta)\Psi_M(\mathbf{C}_M) + \varphi_A(\Theta)\Psi_A(\mathbf{C}_A) + \Psi_\Theta(\Theta) + \Psi_{Mg}(M(\Theta))$;

в) для ППФ – $\Psi = \varphi_r(\Theta)\Psi_r(C_r) + \varphi_g(\Theta)\Psi_g(C_g) + \Psi_\Theta(\Theta)$.

Неравенство Клаузиуса – Дюгема может быть записано в виде

$$\begin{aligned} P_{II} \cdot \dot{E} - \rho_0 (\dot{\Psi} + \dot{\Theta} s) - Jq \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta &\geq 0 \text{ – для СПФ и ППФ;} \\ P_{II} \cdot \dot{E} - \rho_0 (\dot{\Psi} + \dot{\Theta} s) - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{M}} - Jq \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta &\geq 0 \text{ – для ФСПФ.} \end{aligned}$$

Здесь s – энтропия; q – вектор теплового потока; ρ_0 – плотность массы в начальной конфигурации; $\tilde{\nabla}$ – оператор Гамильтона в текущей конфигурации.

Подставляя выражение для свободной энергии в неравенство Клаузиуса – Дюгема и принимая во внимание соотношения (6), (8) и (9), получим

а) для СПФ:

$$\begin{aligned} P_{II} \cdot \left(\dot{\phi}_M (E_M - E_A) + \varphi_M \dot{E}_M + (1 - \varphi_M) \dot{E}_A + \dot{E}_{Ph} + \dot{E}_P + \alpha \dot{\Theta} (2E + g) \right) - \\ - \rho_0 \left(\dot{\phi}_M (\Psi_M - \Psi_A) + 2\varphi_M (\partial \Psi_M / \partial C_M) \cdot \dot{E}_M + 2(1 - \varphi_M) (\partial \Psi_A / \partial C_A) \cdot \dot{E}_A + \dot{\Psi}_\Theta + \dot{\Theta} s \right) - \\ - Jq \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0, \end{aligned}$$

откуда, применяя процедуру линейного локального продолжения процесса по переменным E_A , E_M и Θ , следует, что

$$\begin{aligned} P_{II} = 2\rho_0 (\partial \Psi_M / \partial C_M) = 2\rho_0 (\partial \Psi_A / \partial C_A), \\ \rho_0 s = P_{II} \cdot \left[(E_M - E_A + \tilde{E}_{Ph}) \phi'_M + \alpha (2E + g) \right] - \rho_0 (\Psi_M - \Psi_A) \phi'_M - \rho_0 \Psi'_\Theta. \end{aligned}$$

Здесь $\phi'_M = (\partial \phi_M / \partial \Theta)$, $\Psi'_\Theta = (\partial \Psi_\Theta / \partial \Theta)$.

б) для ФСПФ:

$$\begin{aligned} P_{II} \cdot \left(\dot{\phi}_M (E_M - E_A) + \varphi_M \dot{E}_M + (1 - \varphi_M) \dot{E}_A + \dot{E}_{Ph} + \dot{E}_P + \alpha \dot{\Theta} (2E + g) \right) - \\ - \rho_0 \left(\dot{\phi}_M (\Psi_M - \Psi_A) + 2\varphi_M (\partial \Psi_M / \partial C_M) \cdot \dot{E}_M + 2(1 - \varphi_M) (\partial \Psi_A / \partial C_A) \cdot \dot{E}_A + \right. \\ \left. + (\partial \Psi_{Mg} / \partial M) \cdot \dot{M} + (\partial \Psi_{Mg} / \partial M) \cdot (\partial M / \partial \Theta) \dot{\Theta} + \dot{\Psi}_\Theta + \dot{\Theta} s \right) - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{M}} - Jq \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0, \end{aligned}$$

откуда, применяя процедуру линейного локального продолжения процесса по переменным E_A , E_M , и Θ , следует, что

$$\begin{aligned} P_{II} = 2\rho_0 (\partial \Psi_M / \partial C_M) = 2\rho_0 (\partial \Psi_A / \partial C_A), \quad \mu_0 \mathbf{H} = -\rho_0 (\partial \Psi_{Mg} / \partial M), \\ \rho_0 s = P_{II} \cdot \left[(E_M - E_A + \tilde{E}_{Ph}) \phi'_M + \alpha (2E + g) \right] - \rho_0 (\Psi_M - \Psi_A) \phi'_M - \rho_0 \Psi'_\Theta + \mu_0 (\partial M / \partial \Theta) \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видно, что энтропия зависит и от магнитного поля. Обозначим $s_M = \mu_0 / \rho_0 (\partial M / \partial \Theta) \mathbf{H}$.

в) для ППФ:

$$\begin{aligned} P_{II} \cdot \left(\dot{\phi}_g (E_g - E_r) + \varphi_g \dot{E}_g + (1 - \varphi_g) \dot{E}_r + \dot{E}_f + \varphi_g \dot{E}_V + \alpha \dot{\Theta} (2E + g) \right) - \\ - \rho_0 \left(\dot{\phi}_g (\Psi_g - \Psi_r) + 2\varphi_g (\partial \Psi_g / \partial C_g) \cdot \dot{E}_g + 2(1 - \varphi_g) (\partial \Psi_r / \partial C_r) \cdot \dot{E}_r + \dot{\Psi}_\Theta + \dot{\Theta} s \right) - \\ - Jq \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0, \end{aligned}$$

откуда при применении процедуры линейного локального продолжения процесса по переменным E_r , E_g и Θ следует, что

$$P_{II} = 2\rho_0(\partial\Psi_g / \partial C_g) = 2\rho_0(\partial\Psi_r / \partial C_r),$$

$$\rho_0 s = P_{II} \cdot \left[(E_g - E_r + \tilde{E}_f) \phi'_M + \alpha(2E + g) \right] - \rho_0 (\Psi_g - \Psi_r) \phi'_g - \rho_0 \Psi'_\Theta.$$

Таким образом, в результате термодинамического анализа получены соотношения для энтропии и следующие равенства: $P_{IIA} = P_{IIM} = P_{II}$ (для СПФ и ФСПФ); $P_{Iir} = P_{Iig} = P_{II}$ (для ППФ), в которых $P_{IIA} = 2\rho_0(\partial\Psi_A / \partial C_A)$, $P_{IIM} = 2\rho_0(\partial\Psi_M / \partial C_M)$, $P_{Iir} = 2\rho_0(\partial\Psi_r / \partial C_r)$, $P_{Iig} = 2\rho_0(\partial\Psi_g / \partial C_g)$.

4. Конкретизация определяющих соотношений

Для описания упругого поведения СПФ и ФСПФ (для аустенитной и мартенситной фаз) воспользуемся упрощённым законом Синьорини [7]:

$$P_{II\gamma} = J(C_\gamma) \left[(k_{1\gamma} + k_{2\gamma}) C_\gamma^{-1} - 2k_{2\gamma} C_\gamma^{-2} \right], \quad \gamma = A, M,$$

$$k_{1\gamma} = \frac{\Lambda_\gamma}{2} \left[3 - I_1(C_\gamma^{-1}) \right] + \frac{\Lambda_\gamma + G_\gamma}{8} \left[3 - I_1(C_\gamma^{-1}) \right]^2, \quad k_{2\gamma} = G_\gamma - \frac{\Lambda_\gamma + G_\gamma}{2} \left[3 - I_1(C_\gamma^{-1}) \right],$$

где Λ_γ и G_γ – параметры материала, имеющие смысл параметра Ламе и модуля сдвига линейной теории упругости; I_1 – первый главный инвариант соответствующего тензора. Тогда, согласно соотношениям (3), получаем

$$\tilde{L}_\gamma^{IV} = J(C_\gamma) \left\{ (k_{1\gamma} + k_{2\gamma}) C_\gamma^{-1} C_\gamma^{-1} - k_{2\gamma} C_\gamma^{-1} C_\gamma^{-2} + (\Lambda_\gamma + G_\gamma - 2k_{2\gamma}) C_\gamma^{-2} C_\gamma^{-1} - \right.$$

$$\left. - 2(k_{1\gamma} + k_{2\gamma}) C_\gamma^{-1} \cdot C_{II}^{*2} C_\gamma^{-1} + 4k_{2\gamma} \left[\left(C_\gamma^{-1} \cdot C_{II}^{*2} C_\gamma^{-1} \right)^2 C_\gamma^{-1} + C_\gamma^{-1} \cdot \left(C_\gamma^{-1} \cdot C_{II}^{*2} C_\gamma^{-1} \right) \right] \right\},$$

где $\overset{*}{\cdot}$ – позиционное скалярное умножение тензора второго ранга справа на второй базисный вектор тензора четвёртого ранга [3]; C_{II} – второй изотропный тензор четвёртого ранга [3; 7].

В качестве упругого потенциала как для высокоэластичного, так и для застеклованного состояния в ППФ взят потенциал Пенга – Ландела:

$$W_\gamma = \frac{1}{2} G_\gamma \left(I_1(C_\gamma) J^{-2/3}(C_\gamma) - 3 \right) + \frac{1}{2} B_\gamma \left(J(C_\gamma) - 1 \right)^2, \quad \gamma = r, g,$$

где B_γ и G_γ – параметры материала, имеющие смысл объёмного модуля и модуля сдвига линейной теории упругости. В этом случае, с учётом (3), находим, что

$$\tilde{L}_\gamma^{IV} = -\frac{2}{3} J^{-2/3}(C_\gamma) C_\gamma \left[g C_\gamma^{-1} + C_\gamma^{-1} g - \frac{1}{3} I_1(C_\gamma) C_\gamma^{-1} C_\gamma^{-1} - I_1(C_\gamma) C_\gamma^{-1} \cdot C_{II}^{*2} C_\gamma^{-1} \right] +$$

$$+ 2J(C_\gamma) B_\gamma \left[\left(J(C_\gamma) - \frac{1}{2} \right) C_\gamma^{-1} C_\gamma^{-1} - \left(J(C_\gamma) - 1 \right) C_\gamma^{-1} \cdot C_{II}^{*2} C_\gamma^{-1} \right].$$

5. Постановка краевых задач

Рассмотрим тело, ограниченное поверхностью S и занимающее в пространстве область $V^{(in)}$. Для квазистатических процессов уравнение равновесия запишется в виде

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{K} = 0, \quad \forall x \in V^{(in)},$$

где ρ – плотность массы в текущей конфигурации; \mathbf{K} – вектор массовых сил.

Вариационная постановка краевой задачи в форме Лагранжа в текущей конфигурации будет иметь следующий известный вид:

$$\int_S \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{U} dS + \int_{V^{(in)}} \rho \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV = \int_{V^{(in)}} \mathbf{T} \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{U} dV, \quad (10)$$

где \mathbf{Q} – вектор поверхностных сил; δ – символ вариации; \mathbf{U} – вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую.

Для ФСПФ необходимо решать связанную задачу деформирования намагничивающегося тела в магнитном поле: поле вызывает деформирование тела, которое, в свою очередь, искажает деформирующее это тело магнитное поле. В этом случае кроме вариационного уравнения (10) необходимо записать вариационное уравнение для магнитной подзадачи:

$$\int_{V^{(in)}} \chi \mathbf{H}_0 \cdot \tilde{\nabla} \delta \psi dV = \int_{V^{(in)}} (1 + \chi) \tilde{\nabla} \psi \cdot \tilde{\nabla} \delta \psi dV + \int_{V^{(ex)}} \tilde{\nabla} \psi \cdot \tilde{\nabla} \delta \psi dV. \quad (11)$$

Здесь χ – магнитная восприимчивость ($\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$); \mathbf{H}_0 – приложенное внешнее поле; ψ – скалярная функция, – такая, что $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \tilde{\nabla} \psi$; $V^{(ex)}$ – объём окружающей тело внешней среды (магнитная подзадача решается во всём пространстве).

В магнитном поле на тело действуют массовые силы $\mathbf{K} = (\mu_0 / \rho) \mathbf{M} \cdot \tilde{\nabla} \mathbf{H}$ и поверхностные силы $\mathbf{Q} = (1/2) \mu_0 M_N^2 \mathbf{N}$; $M_N = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$, \mathbf{N} – внешняя единичная нормаль к поверхности тела в текущей конфигурации.

Предполагая, что для магнитной восприимчивости справедливо соотношение $\chi = \phi_M \chi_M + (1 - \phi_M) \chi_A$ и определяя намагниченность для каждой фазы по формуле Фрёлиха – Кенелли $\mathbf{M} = M_{st} / (a_{st} + H) \mathbf{H}$, где M_{st} – намагниченность насыщения; a_{st} – постоянная материала;

$H = |\mathbf{H}|$, получаем $\mathbf{M} = \left[\phi_M \frac{M_{st}^{(M)}}{a_{st}^{(M)} + H} + (1 - \phi_M) \frac{M_{st}^{(A)}}{a_{st}^{(A)} + H} \right] \mathbf{H}$, где $M_{st}^{(M)}$ и $a_{st}^{(M)}$ задаются для мартенситной фазы, а $M_{st}^{(A)}$ и $a_{st}^{(A)}$ – для аустенитной.

Поскольку до решения задачи поверхность S и объём $V^{(in)}$ в текущем состоянии неизвестны, вариационные уравнения (10) и (11) приводятся к начальной конфигурации:

$$\int_{S_0} J \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{U} dS_0 + \int_{V_0^{(in)}} \rho_0 \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV_0 = \int_{V_0^{(in)}} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{E} dV_0, \quad (12)$$

$$\int_{V_0^{(in)}} J \chi \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \delta(\nabla \psi) dV_0 = \int_{V_0^{(in)}} J (1 + \chi) (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \psi) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \delta(\nabla \psi)) dV_0 + \int_{V_0^{(ex)}} J (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \psi) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \delta(\nabla \psi)) dV_0, \quad (13)$$

где \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к поверхности тела S_0 с объёмом $V_0^{(in)}$ в начальной конфигурации; ∇ – оператор Гамильтона в начальной конфигурации; $V_0^{(ex)}$ – объём окружающей тело внешней среды в начальной конфигурации.

При решении краевых задач для СПФ и ППФ используется уравнение (12); при решении краевых задач для ФСПФ – уравнения (12) и (13). Для численной реализации применяется метод пошагового нагружения, при этом все величины в соотношениях (12) и (13) представляются относительно промежуточной конфигурации κ_* , что приводит к линеаризации этих уравнений.

5. Верификация моделей

Изгиб пластин из СПФ. Рассмотрены следующие задачи о деформировании консольной пластины с одним жёстко закреплённым концом.

Задача 1. Две пластины одинаковой длины $L = 0,1$ м, толщиной $h_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м (из бериллиевой бронзы) и $h_2 = 10^{-3}$ м (из равноатомного никелида титана NiTi) скреплены по длине при температуре, соответствующей полностью аустенитному состоянию NiTi. Образец последовательно охлаждается и нагревается таким образом, что в никелиде титана происходят прямой и обратный мартенситные переходы.

Задача 2. Пластина из NiTi толщиной $h_2 = 10^{-3}$ м в аустенитном состоянии подвергается растяжению по длине усилием $p = 100$ МПа, охлаждается до мартенситного состояния, после чего приложенная нагрузка снимается. В мартенситном состоянии эта пластина скрепляется с пластиной из бериллиевой бронзы толщиной $h_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м. Полученная двухслойная пластина длиной $L = 0,05$ м нагревается, а затем охлаждается таким образом, что в никелиде титана происходят обратный и прямой мартенситные переходы.

Задача 3. Пластина из NiTi длиной $L = 0,05$ м и толщиной $h = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м охлаждается из аустенитного состояния до мартенситного, при этом в процессе охлаждения происходит рост изгибающего касательного усилия от 0 МПа до 20 МПа. После этого происходит нагрев пластины до начальной температуры при уменьшении изгибающего касательного усилия от 20 МПа до 0 МПа.

В рассматриваемых задачах происходит изгиб пластин и последующее восстановление их формы. Задачи решались в двумерной постановке (условие плоской деформации). На рис. 2 показаны зависимости перемещения свободного конца пластин от температуры (U – модуль вектора перемещений; $h = h_1 + h_2$ – толщина пластины); для задачи 1 (см. рис. 2, а) и задачи 3 (см. рис. 2, в) представлены перемещения для прямого и обратного фазовых переходов; для задачи 2 (см. рис. 2, б) только для обратного. Аналогичные задачи об изгибе пластин были рассмотрены в работе [8].

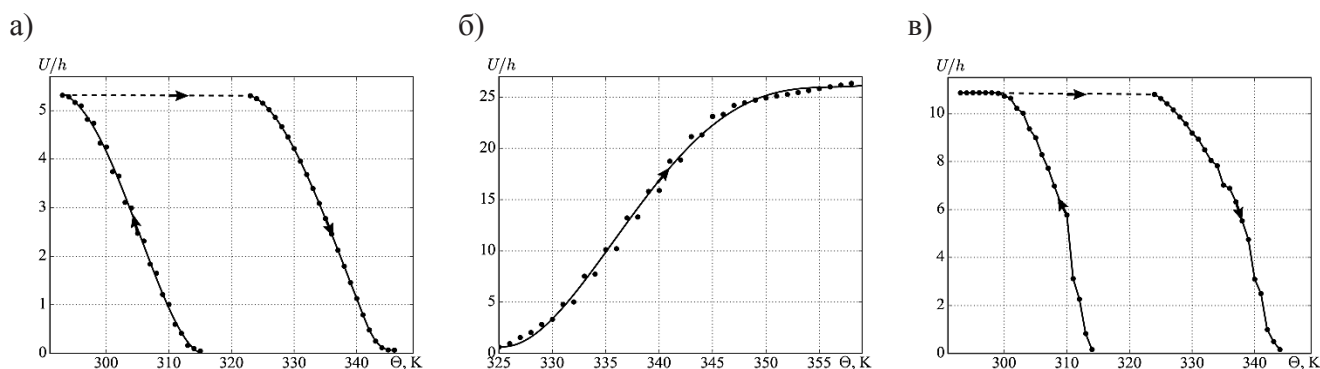


Рис. 2. Изгиб пластин из СПФ: а – задача 1; б – задача 2; в – задача 3

Изгиб консольной балки из СПФ. Рассмотрена задача о прямом и обратном фазовых переходах в образце из никелида титана в форме стержня прямоугольного сечения $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ и длиной 10 см , закреплённом с левого торца. Прямой фазовый переход происходит при охлаждении из аустенитного состояния при изгибающем усилии $p = 5$ МПа, заданном на правом торце, при этом в образце возникают фазовые деформации. В мартенситном состоянии стержень разгружается, после чего при нагревании фазовые деформации исчезают и происходит восстановление начальной формы.

На рис. 3, а показана начальная конфигурация образца и конфигурация после прямого фазового перехода. На рис. 3, б представлено распределение фазовых деформаций E_{Ph}^{zz} вдоль оси об-

разца z . Отметим, что значение E_{ph}^{zz} отлично от нуля на нейтральной оси стержня, поскольку в модели учитываются объёмные деформации, вызванные фазовым переходом (см. соотношение (7)).

Изгиб консольной балки из ФСПФ. В работе [8] представлен эксперимент, в котором в образце из сплава Ni-Mn-Fe-Ga (сплав Гейслера) осуществляется управление температурой прямого и обратного фазового перехода «мартенсит – аустенит» магнитным полем.

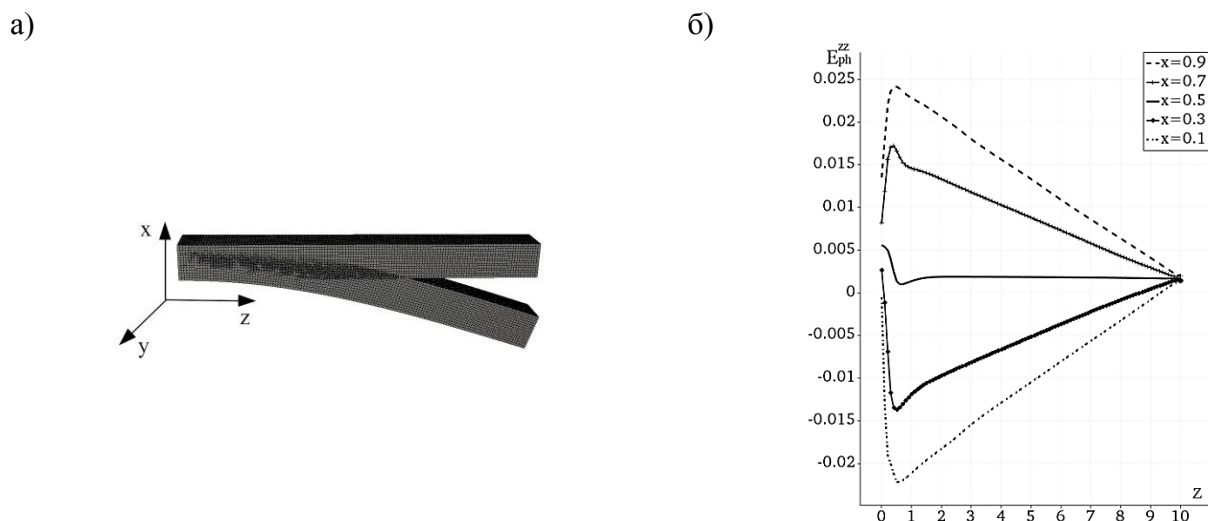


Рис. 3. Задача о прямом и обратном фазовых переходах в образце из никелида титана: а – конфигурации образца; б – распределение фазовых деформаций

Рассмотрена краевая задача, соответствующая этому эксперименту. Образец в форме стержня прямоугольного сечения $1\text{ см} \times 0,5\text{ см}$ и длиной 7 см закреплён с левого торца. В начальный момент времени стержень находится в аустенитном состоянии при температуре Θ_0 (см. рис. 4, а). При охлаждении образца при заданном на правом торце и сдвиговом усилии $p = 5\text{ МПа}$ происходит прямой фазовый переход (путь $a \rightarrow b$ на рис. 4, а), после чего образец разгружается. Затем происходит включение постоянного внешнего магнитного поля $H_0 = 80 \cdot 10^5\text{ А/м} = 10\text{ Т}$, направленного вдоль оси стержня (путь $b \rightarrow c$), и образец нагревается до температуры Θ_0 (путь $c \rightarrow d$). Так как приложенное магнитное поле увеличивает характеристические температуры фазовых переходов, как показано на рис. 4, а, то в точке d образец остаётся в мартенситном состоянии. Обратный фазовый переход происходит при снятии приложенного магнитного поля (путь $d \rightarrow a$), при этом образец восстанавливает свою форму (выпрямляется).

На рис. 4, б показана зависимость перемещения точки, находящейся в центре правого торца стержня при снятии магнитного поля (U – модуль вектора перемещений; h – толщина стержня).

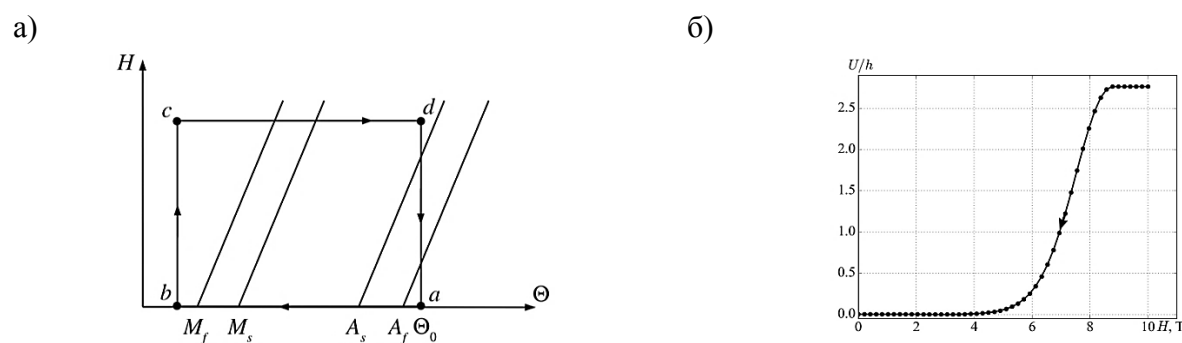


Рис. 4. Краевая задача: а – смещение температур фазового перехода в магнитном поле; б – восстановление формы при снятии магнитного поля

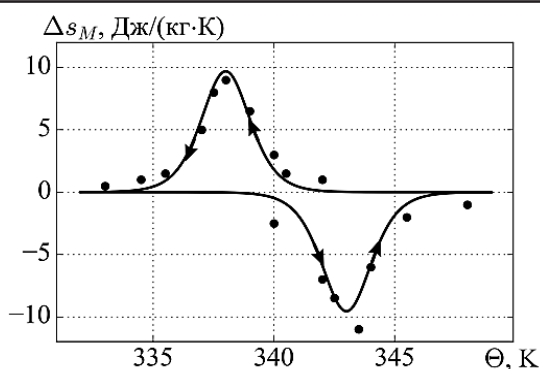


Рис. 5. Изменение магнитной части энтропии

Описание магнитокалорического эффекта в ФСПФ. В работе [16] представлена экспериментальная зависимость изменения энтропии при приложении магнитного поля, так называемый магнитокалорический эффект (изменение температуры магнитного вещества при изменении внешнего магнитного поля) для сплава Ni-Mn-Ga.

На рис. 5 приведено сравнение данных эксперимента (точки) с изменением энтропии согласно представленной модели (сплошная линия):

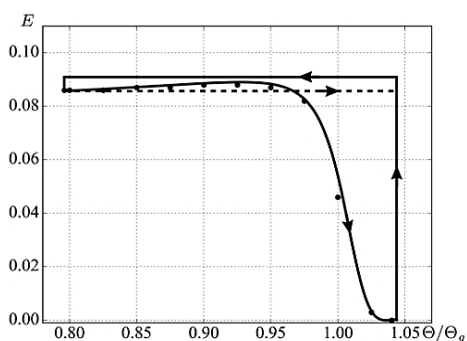
$$\Delta s_M = \frac{\mu_0}{\rho_0} \left. \frac{\partial M(\Theta, H)}{\partial \Theta} \right|_{H=H_0} \Delta H.$$

Одноосное растяжение образцов из ППФ.

В работе [9] получены экспериментальные зависимости напряжений и деформаций от температуры для образца (стержня) из ППФ. В начальный момент времени в высокоэластичном состоянии образец растягивался вдоль своей оси до осевой деформации $E = 0,091$, после чего деформация фиксировалась и образец охлаждался до температуры, соответствующей застеклованному состоянию. При этом наблюдался рост напряжений до $T = 3,97$ МПа. При последующем нагревании образец возвращался в начальное состояние. Если образец в застеклованном состоянии разгрузить до нулевых напряжений, то в материале останутся «замороженные» деформации $E = 0,086$, которые исчезают при нагревании. Рассмотрен также случай, когда после разгрузки образца в застеклованном состоянии его последующее нагревание происходит при фиксированной деформации, – в этом случае зависимость напряжения от температуры будет немонотонна.

На рис. 6, а и б, приведены данные эксперимента и результаты, полученные по представленной модели. Экспериментальные данные показаны точками, зависимости деформации и напряжения от температуры при нагрузке, охлаждении и последующем нагреве – сплошной линией, нагрев образца при фиксированной деформации – штриховой линией.

а)



б)

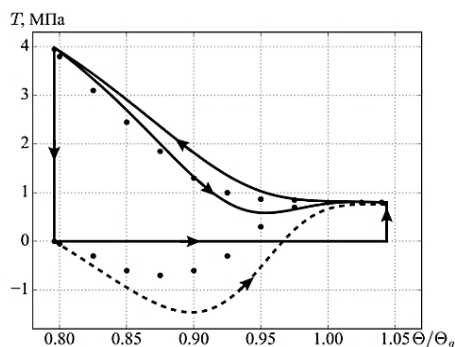


Рис. 6. Данные эксперимента и результаты:

а – зависимости деформации от температуры; б – зависимости напряжения от температуры

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферромагнетики с памятью формы / А. Н. Васильев, В. Д. Бучельников, Т. Такоги, В. В. Ховайло // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173. – № 6. – С. 577-607.
2. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 585 с.

3. Роговой, А. А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента / А. А. Роговой // Вестник Пермского государственного технического университета. Динамика и прочность машин. – 2001. – № 2. – С.83-90.
4. Мовчан, А. А. Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений / А. А. Мовчан, П. В. Шельмагин, С. А. Казарина // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 5. – С. 152-160.
5. Малыгин, Г. А. Размытые мартенситные переходы и пластичность кристаллов с эффектом памяти формы / Г. А. Малыгин // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – № 2. – С. 187-212.
6. Роговой, А. А. Моделирование термомеханических процессов в полимерах с памятью формы при конечных деформациях / А. А. Роговой, О. С. Столбова // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56. – № 6. – С. 143-157.
7. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
8. Роговой, А. А. Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы / А. А. Роговой, О. С. Столбова // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54. – № 2. – С. 148-162.
9. Магнитные сплавы с памятью формы: фазовые переходы и функциональные свойства / В. Д. Бучельников, А. Н. Васильев, В. В. Коледов, С. В. Таскаев, В. В. Ховайло, В. Г. Шавров // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176. – № 8. – С. 900-906.
10. Otsuka, K. Shape Memory Materials / K. Otsuka, C. M. Wayman. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – P. 27-28.
11. Behl, M. Shape-memory polymers. Review / M. Behl, A. Lendlein // Materials Today. – 2007. – Vol. 10. – № 4. – P. 20-28.
12. Rogovoy, A. A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations / A. A. Rogovoy // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2012. – Vol. 24. – № 2. – P. 81-114.
13. Rogovoy, A. Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys / A. Rogovoy, O. Stolbova // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol. 85. – P.130-155.
14. Baghani, M. A large deformation framework for shape memory polymers: Constitutive modeling and finite element implementation / M. Baghani, R. Naghdabadi, J. Arghavani // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2013. – Vol. 24(1). – P.21-32.
15. Volk, B. L. Analysis of the finite deformation response of shape memory polymers: II. 1D calibration and numerical implementation of a finite deformation, thermoelastic model / B. L. Volk, D. C. Lagoudas, Chen Yi-Chao. // Smart Materials and Structures. – 2010. – Vol. 19. – № 7. – P. 75006-75016.
16. Cherechukin, A. A. E. et al. Shape memory effect due to magnetic field induced thermoelastic martensitic transformation in polycrystalline Ni-Mn-Fe-Ga alloy / A. A. Cherechukin, I. E. Dikstein, I. Ermakov // Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 291. – №№ 2-3. – P. 175-183.
17. Liu, Y. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling / Y. Liu, K. Gall, M. L. Dunn, A. R. Greenberg, J. Diani // International Journal of Plasticity. – 2006. – Vol. 22. – P. 279-313.



Панченко Г. Л.
G. L. Panchenko

РАЗЛИЧИЯ В УЧЁТЕ ВЯЗКОСТИ В ПРОЦЕССАХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ ВСЕСТОРОННЕГО ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

THE DIFFERENCES IN VISCOSITY ACCOUNTING IN CREEPING AND PLASTIC FLOW OF THE SPHERICAL LAYER MATERIAL UNDER CONDITIONS OF ALL-SIDED HYDROSTATIC COMPRESSION

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); доцент кафедры математики и моделирования Владивостокского государственного университета экономики и сервиса (Россия, Владивосток). E-mail: panchenko.21@yandex.ru.

Ms. Galina L. Panchenko – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy of FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur); Associate professor, Mathematics and Modeling Department, Vladivostok State University of Economics and Service (Russia, Vladivostok). E-mail: panchenko.21@yandex.ru.

Аннотация. В работе в рамках модели больших упругопластических деформаций, учитывающей реологические свойства материалов, приводится решение краевой задачи о ползучести и вязкопластическом течении в сферическом слое под действием равномерного изменяющегося со временем давления. Рассчитаны обратимые, необратимые и полные деформации, напряжения и перемещения. Установлена закономерность продвижения упругопластической границы в слое. Построены графики изменения граничных поверхностей сферического слоя.

Summary. The article gives a solution to the boundary-value problem in the framework of model of large elastoplastic deformations, taking into account the rheological properties of materials, about creeping and viscoplastic in a spherical layer under the action of a uniform pressure that varies with time. Reversible, irreversible and complete deformations, stresses and displacements are calculated. The regularity of the elastoplastic boundary in the layer is established. The graphs of the change in the boundary surfaces of a spherical layer are constructed.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вязкость, пластичность, большие деформации.

Key words: elasticity, creep, viscosity, plasticity, large deformations.

УДК 539.37

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-31-60017 мол_а_дк).

Введение

Формоизменение некоторых материалов, используемых в машиностроении, осуществляется способом холодной формовки в условиях ползучести [1]. В процессе обработки материала могут возникать области пластического течения, значительно влияющие на процесс его ползучести. На границах областей течения происходит смена механизма накопления необратимых деформаций, для изучения которого требуются новые постановки и решения краевых задач. Здесь в рамках модели больших деформаций [2; 3] рассмотрим задачу о возникновении пластического течения в окрестности внутренней границы сферического слоя, находящегося в условиях ползучести под действием всестороннего гидростатического сжатия.

Основные соотношения модели больших упругопластических деформаций

Основные соотношения запишем в прямоугольной системе пространственных координат Эйлера x_i . Полагаем, что параметрами состояния деформируемого тела являются два симметричных тензора с компонентами e_{ij} и p_{ij} , которые характеризуют обратимые и необратимые деформации соответственно. Согласно используемой модели [3] эти тензоры определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса):

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\varepsilon_{kj} - \gamma_{kj} + z_{kj}) \right], \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik} \gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, \quad (1)$$

в которых

$$\begin{aligned} \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \\ v_i &= \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad r_{ij} = -r_{ji} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij} (\varepsilon_{sk}, e_{sk}). \end{aligned} \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) u_i , v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; D/Dt – используемая объективная производная тензоров по времени, приведённая для произвольного тензора n_{ij} ; γ_{ij} – источник в уравнении переноса тензора необратимых деформаций p_{ij} . Нелинейная составляющая z_{ij} тензора вращений r_{ij} имеет вид

$$\begin{aligned} z_{ij} &= A^{-1} \left[(\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) C^2 + (\varepsilon_{ik} e_{ks} e_{sj} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{sj}) C + e_{ik} \varepsilon_{ks} e_{st} e_{ij} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{st} e_{ij} \right], \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3} E_1^3 + \frac{1}{3} E_3, \quad C = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \end{aligned} \quad (3)$$

и её наличие связано с выполнением требования неизменности тензора пластических деформаций p_{ij} в процессах разгрузки. Из соотношений (1)–(3) получим связь тензоров e_{ij} и p_{ij} с тензором полных деформаций Альманси d_{ij} :

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}). \quad (4)$$

Отметим, что в зависимости (4) обратимыми деформациями следовало бы называть компоненты $s_{ij} = e_{ij} - 1/2 e_{ik} e_{kj}$, так как при $p_{ij} \equiv 0$ из (4) следует, что $d_{ij} = s_{ij}$. Однако введение тензора с компонентами e_{ij} позволяет, во-первых, достаточно просто записать уравнения переноса (1) и, во-вторых, получить для упругопластической среды аналог формулы Мурнагана. Если считать материал несжимаемым и принять во внимание условие независимости плотности распределения свободной энергии от необратимых деформаций, то из закона сохранения энергии следует [3]

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (5)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Эйлера – Коши; p – добавочное гидростатическое давление; $W = W(e_{ij})$ – упругий потенциал, который для изотропной среды зададим в форме

$$W = W(J_1, J_2) = (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \xi J_1 J_2 - \chi J_1^3, \quad (6)$$

$$J_1 = s_{jj}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ji}.$$

В зависимости (6) μ – модуль сдвига; a, b, ξ, χ – упругие модули более высокого порядка.

Диссипативный механизм деформирования свяжем только с вязкими и пластическими свойствами материалов и для его конкретизации зададим скорости необратимых деформаций γ_{ij} .

Считаем, что вязкие свойства среды проявляются на всех этапах процесса деформирования. Необратимые деформации p_{ij} накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластическими деформациями.

В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности текучести, диссипативный механизм деформирования зададим в форме закона ползучести Нортона [7]:

$$V(\sigma_{ij}) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2} \left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right)^{1/2}}, \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений; ε_{ij}^v – скорости деформаций ползучести; B, n – заданные параметры ползучести материала. При достижении напряжённым состоянием поверхности нагружения диссипативный механизм меняется, начинается пластическое течение. Источником γ_{ij} необратимых деформаций p_{ij} в развивающейся области пластического течения являются теперь скорости пластических деформаций $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$. Согласно принципу максимума Мизеса связь скоростей пластических деформаций ε_{ij}^p с напряжениями устанавливается ассоциированным законом пластического течения:

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha_{ij}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

В качестве пластического потенциала будем использовать условие текучести Треска, обобщённое на случай учёта вязких свойств материала [4; 5]:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_n^p - \alpha_n|, \quad (9)$$

в котором k – предел текучести; η – коэффициент вязкости; ε_n^p – главные значения тензора скоростей пластических деформаций.

Предположим, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (7) являются начальными значениями для накапливающихся в области течения пластических деформаций. Для выполнения данного условия требуется также совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования (7) на (8). Таким образом, в соотношениях (8) и (9)

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}^{v_0}, \quad \alpha_n = \varepsilon_n^{v_0}. \quad (10)$$

В (10) $\varepsilon_{ij}^{v_0}$ – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения; $\varepsilon_n^{v_0}$ – его главные значения.

Деформирование материала до начала вязкопластического течения

Пусть несжимаемый материал, деформационные свойства которого удовлетворяют вышеописанным соотношениям, расположен в слое между двумя сферическими поверхностями с радиусами $r = s(t)$ и $r = R(t)$ ($s(t) \ll R(t)$) и общим центром. Процесс деформирования материала свяжем со следующими нагружающими усилиями:

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0. \quad (11)$$

Здесь σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат r, φ, θ ; $P(t)$ – возрастающая со временем функция. Принимаемое условие несжимаемости задаёт кинематику среды с точностью до произвольной функции времени $h(t)$ такой, что

$$u = u_r = r - \left(r^3 + h(t) \right)^{\frac{1}{3}}, \quad h(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t). \quad (12)$$

В зависимостях (12) s_0, R_0 – значения функций $s(t)$ и $R(t)$ в свободном состоянии среды; $u = u_r$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений. Согласно полю перемещений (12) из (4) найдём компоненты тензора полных деформаций Альманси:

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 - H^{-4/3} \right), \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 - 2d_{rr}^{-1/2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - H^{2/3} \right), \quad H = 1 + r^{-3}h(t). \quad (13)$$

Из (1)–(4) найдём компоненты обратимых e_{rr} и $e_{\theta\theta}$ и необратимых $p_{\theta\theta}$ деформаций, а также скоростей деформаций ползучести ε_{rr}^v и $\varepsilon_{\theta\theta}^v$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^v &= \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^v = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \\ e_{rr} &= 1 - H^{-2/3} (1 - 2p_{rr})^{-1/2}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - H^{1/3} (1 - 2p_{rr}), \\ p_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2p_{rr}}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ определяются из соотношения (5) через компоненты тензора обратимых деформаций e_{rr} и $e_{\theta\theta}$ с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления $p(r, t)$. В свою очередь, компоненты e_{rr} и $e_{\theta\theta}$ связаны с компонентой тензора необратимых деформаций $p_{rr}(r, t)$ зависимостями (14). Используя (5), (14), из закона Нортона (7) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\Phi^{n-1}(e_{rr}, e_{\theta\theta}), \quad (15)$$

в котором $\Phi(e_{rr}, e_{\theta\theta}) = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ и функция $\Phi(y_1, y_2)$ определяется через y_1 и y_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(y_1, y_2) &= 2\mu(y_1 - y_2) - \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_1^3 - \lambda_4 y_2^3 + \\ &+ \lambda_5 \left(\frac{1}{2} y_1 y_2^2 - y_1 y_2 \right) + \lambda_6 \left(y_1^2 y_2 - \frac{1}{2} y_1^2 y_2^2 \right) - \lambda_7 y_1^4 + \lambda_8 y_2^4 + \\ &+ \lambda_9 \left(y_1^4 y_2 + 2y_1^3 y_2^2 - \frac{1}{2} y_1^4 y_2^2 - 4y_1^3 y_2 \right) + \lambda_{10} \left(\frac{1}{2} y_1^6 - 3y_2^5 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Постоянные λ_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) в формуле (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu + 4a + 4b + 2\xi, & \lambda_2 &= \mu + 4a + 8b + 4\xi, \\ \lambda_3 &= 2(2a + 2b + 4\xi + 3\chi), & \lambda_4 &= 4(a + 2b + 4\xi + 6\chi), \\ \lambda_5 &= 4b + 2\xi, & \lambda_6 &= 2b + 7\xi + 18\chi, & \lambda_7 &= a + b + \frac{19}{2}\xi + 9\chi, \\ \lambda_8 &= a + 2b + 19\xi + 36\chi, & \lambda_9 &= \frac{3}{4}(\xi + 3\chi), & \lambda_{10} &= \frac{1}{2}(5\xi + 11\chi). \end{aligned}$$

Уравнение (15) связывает две неизвестные функции $p_{rr}(r, t)$ и $h(t)$. Второе уравнение для этих функций получим из уравнения равновесия, проинтегрировав его в области деформирования $s(t) \leq r \leq R(t)$ с учётом краевых условий (11):

$$2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Phi(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr = P(t). \quad (17)$$

Таким образом, для оставшихся неизвестных функций $p_{rr}(r, t)$ и $h(t)$ из (14), (15) и (17) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Psi(r, p_{rr}(r, t), h(t))}{r} dr = P(t), \quad \frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\Psi^{n-1}(r, p_{rr}(r, t), h(t)). \quad (18)$$

В системе (18) введено обозначение

$$\Psi(r, p_{rr}(r, t), h(t)) = \Phi \left(1 - H^{-\frac{2}{3}}(1 - 2p_{rr})^{-\frac{1}{2}}, 1 - H^{\frac{1}{3}}(1 - 2p_{rr}) \right).$$

Система (18) при начальных условиях $h(0) = 0$, $p_{rr}(r, 0) = 0$ решается численно с использованием конечно-разностного метода и составной формулы трапеций [6]. Полученное решение при возрастающем давлении $P(t)$ справедливо лишь до того момента времени $t = t_1$, до которого на внутренней границе слоя $s_1 = s(t_1)$ напряжённое состояние не достигнет поверхности нагружения (9), в нашем случае принимающего следующий вид:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})_{r=s_1} = \Psi(s_1, p_{rr}(s_1, t_1), h(t_1)) = 2k.$$

Вязкопластическое течение

С момента времени $t = t_1$ при дальнейшем увеличении функции $P(t)$ в области $s(t) \leq r \leq m(t)$ идёт процесс вязкопластического течения, а в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ по-прежнему происходит вязкоупругое деформирование. Граница $r = m(t)$, разделяющая данные области, является движущейся границей области вязкопластического течения.

Из (1)–(4) и (9) в области течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ имеем

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k + \frac{3\eta}{2} (\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{rr}^{v0}), \quad \varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}. \quad (19)$$

Из соотношений (19) получим дифференциальное уравнение, связывающее неизвестные функции $p_{rr}(r, t)$ в области $s(t) \leq r \leq m(t)$, $h(t)$ и $m(t)$:

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \frac{2}{3\eta} (1 - 2p_{rr}) [\psi(r, p_{rr}(r, t), h(t)) - 2k] + Bn2^{n-1} k^{n-1} (1 - 2p_{rr}). \quad (20)$$

В области $m(t) \leq r \leq R(t)$ остаётся верным второе уравнение (18). При этом первое уравнение из (18) выполняется во всём слое.

Из того, что $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})|_{r=m(t)} = 2k$, следует уравнение

$$\psi(m(t), p_{rr}(m(t), t), h(t)) = 2k. \quad (21)$$

Таким образом, из (18), (20) и (21) следует система интегро-дифференциальных уравнений для функций $p_{rr}(r, t)$, $h(t)$ и $m(t)$:

$$2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\psi(r, p_{rr}(r, t), h(t))}{r} dr = P(t),$$

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = Bn(1 - 2p_{rr})\psi^{n-1}(r, p_{rr}(r, t), h(t)), \quad m(t) \leq r \leq R(t),$$

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \frac{2}{3\eta} (1 - 2p_{rr}) [\psi(r, p_{rr}(r, t), h(t)) - 2k] + Bn2^{n-1} k^{n-1} (1 - 2p_{rr}), \quad s(t) \leq r \leq m(t),$$

$$\psi(m(t), p_{rr}(m(t), t), h(t)) = 2k.$$

По найденным значениям необратимых деформаций p_{rr} и функций $h(t)$ и $m(t)$ найдём компоненты полных, обратимых и необратимых деформаций из (13) и (14), перемещения – из (12).

Для расчётов использовались линейная функция $p(t) = \beta t$ и следующие значения постоянных: $n = 3$, $Bn\mu^3 / \beta = 3,5$, $a / \mu = 0,9$, $b / \mu = 4$, $\xi / \mu = 20$, $\chi / \mu = 80$, $s_0 / R_0 = 0,03$, $k / \mu = 0,003$, $\mu^2 / (\beta\eta) = 0,14$.

На рис. 1, а и б, показаны распределения необратимых p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ и обратимых e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ деформаций по слою, а рис. 2, а и б, иллюстрирует распределения напряжений σ_{rr} / μ , $\sigma_{\varphi\varphi} / \mu$ и перемещений u / R_0 в момент времени τ_2 .

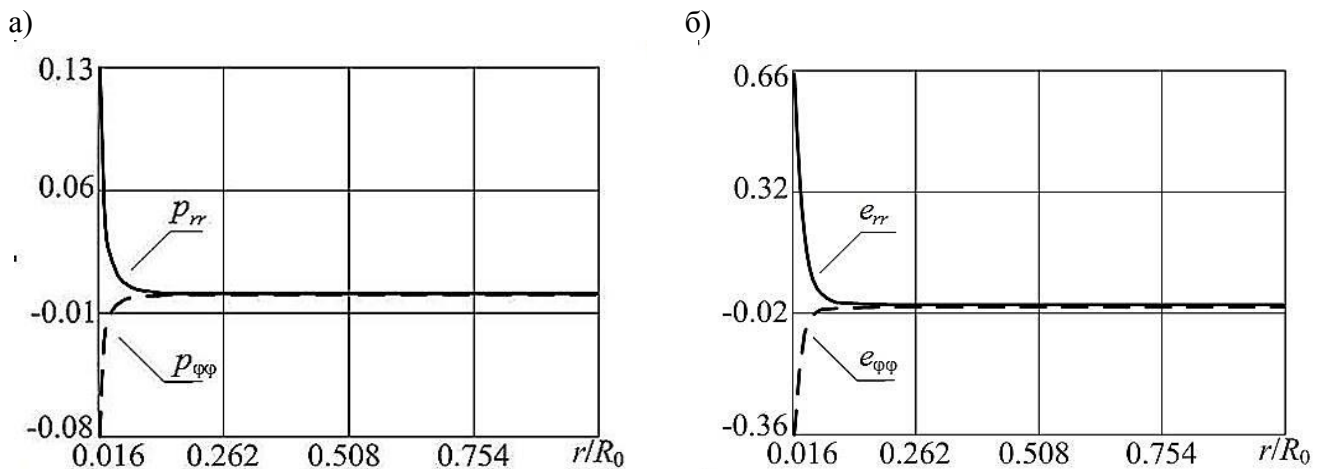


Рис. 1. Распределение деформаций по слою: а – необратимых; б – обратимых

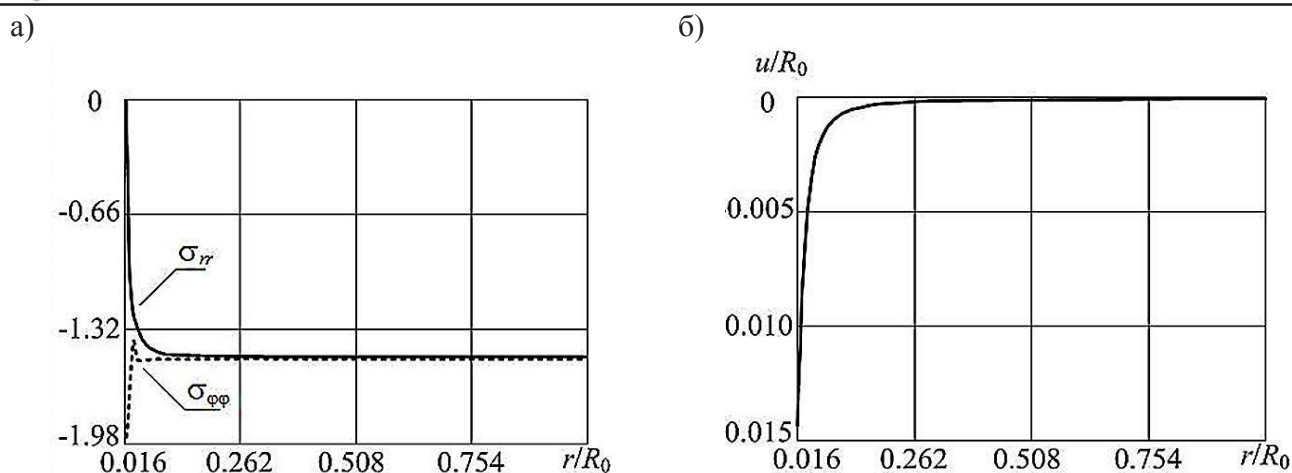


Рис. 2. Графики зависимости от радиуса: а – напряжений; б – перемещений

Заключение

В работе получено решение краевой задачи теории больших деформаций о вязкопластическом течении материала сферического слоя с предварительно накопленными необратимыми деформациями ползучести. Получены зависимости упругопластической границы и граничных поверхностей от времени; найдены распределения обратимых, необратимых и полных деформаций, напряжений и перемещений по слою в разные моменты времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейников, А. И. Интегрированное проектирование процессов изготовления монолитных панелей / А. И. Олейников, А. И. Пекарш. – М.: Эком, 2009. – 109 с.
2. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199-201.
3. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
4. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278.
5. Бегун, А. С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 103-112.
6. Вержбицкий, В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): учеб. пособие для вузов / В. М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
7. Norton, F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. – Y.: Mc Graw Hill, 1929. – 110 p.

Артемов М. А., Барановский Е. С., Бердзенишвили Г. Г.
M. A. Artemov, E. S. Baranovsky, G. G. Berdzenishvili

ОБ АЛГОРИТМАХ РАСЧЁТА ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА

CALCULATION OF THE THERMOPLASTIC STATE OF A DISC

Артемов Михаил Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета (Россия, Воронеж). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Mr. Mikhail A. Artemov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Software and management information system Department, Voronezh State University (Russia, Voronezh). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Барановский Евгений Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета (Россия, Воронеж). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Mr. Evgeny S. Baranovsky – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Software and management information system Department, Voronezh State University (Russia, Voronezh). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Бердзенишвили Георгий Геннадиевич – преподаватель кафедры программного обеспечения и администрирования информационных систем Воронежского государственного университета (Россия, Воронеж). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Mr. Geogriy G. Berdzenishvili – Lecturer, Head of Software and management information system Department, Voronezh State University (Russia, Voronezh). E-mail: artemov_m_a@mail.ru.

Аннотация. Приведено точное решение задачи о напряжённом состоянии в материале тонкого круглого упругопластического диска при термомеханическом воздействии. Считается, что температура в центральной части диска однородна и задана, а внешняя кромка нагружена задаваемыми радиальными усилиями и поддерживается при постоянной комнатной температуре. С учётом статической определимости такой задачи указаны условия на задаваемые параметры, при которых в разных областях диска возможны пластические состояния. Приведены сравнения в таких условиях в зависимости от выбора условий пластического течения как классических, так и кусочно-линейного общего вида.

Summary. An exact solution of the problem of the stressed state in the material of a thin, circular, elastoplastic disk is given under thermomechanical force. It is believed that the temperature in the central part of the disk is uniform and specified, and the outer edge is loaded with a given radial force and is maintained at a constant room temperature. Taking into account the static definability of such a problem, conditions are specified for the given parameters, at which plastic states are possible in different areas of the disk. Comparisons are made under such conditions, depending on the choice of conditions for the plastic flow of both classical and piecewise linear general form.

Ключевые слова: упругость, пластичность, идеальное пластическое течение, температурные напряжения.
Key words: elasticity, plasticity, ideal plastic flow, temperature stresses.

УДК 539.374

Математическому моделированию напряжённого и деформированного состояний дисков, испытывающих кинематическое, силовое и тепловое воздействия, посвящено немало работ. Практически во всех последних публикациях учитываются зависимости параметров тел от температуры, как, например, в [8 – 13].

Постановка задачи

Рассматривается тонкий круговой диск, подверженный полярно симметричному тепловому и силовому воздействиям. Поле температур центральной части диска $0 \leq r \leq a$ является однородным $T = T_a$. На внешней границе диска задано давление p_b и температура $T_b = 0$.

Все величины приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба напряжений выбран предел пластичности k при начальной температуре, а в качестве масштаба длины выбран радиус a . Для безразмерных величин принято обозначение размерных величин, что не привносит путаницу, поскольку не вводятся безразмерные комплексы. Все величины являются усреднёнными по толщине диска.

Для определения напряжённого, деформированного и температурного состояний диска выбирается цилиндрическая система координат, ось которой перпендикулярна срединной поверхности диска и является осью симметрии диска.

Для несвязной термомеханической задачи поле температур определяется по формуле [1]:

$$T = T_a f, \quad f = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)}, & a \leq r \leq b. \end{cases} \quad (1)$$

Упругое состояние

Обозначим через c_i, c_e радиусы границ области, в которой диск находится в упругом состоянии, через p_i и p_e – давления на этих границах. В этой области компоненты тензора напряжений представлены в формулах [1]:

$$\sigma_r = -\frac{T_a \alpha E}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr + A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = T_a \alpha E \left(\frac{1}{r^2} \int_{c_i}^r f r dr - f \right) + A + \frac{B}{r^2}, \quad (2)$$

где

$$A = \frac{T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{p_i c_i^2 - p_e c_e^2}{c_e^2 - c_i^2}, \quad B = \frac{c_i^2 T_a \alpha E}{c_e^2 - c_i^2} \int_{c_i}^{c_e} f r dr + \frac{c_i^2 c_e^2 (p_i - p_e)}{c_e^2 - c_i^2}. \quad (3)$$

При решении рассматриваемой упругопластической задачи, если имеется пластическая зона, напряжения в зоне упругого состояния можно определять из решения начальной задачи. Полагая, что на упругопластической границе $\sigma_r|_{r=c_i} = -p_i$, $\sigma_\varphi|_{r=c_i} = \sigma_{i\varphi}$, находим: $A = \frac{1}{2}(\alpha T_a E f_i - p_i + \sigma_{i\varphi})$,

$$B = \frac{c_i^2}{2}(\alpha T_a E f_i + p_i + \sigma_{i\varphi}), \quad f_i = f|_{r=c_i}.$$

Переход диска в упругопластическое состояние

Задача плоского напряжённого состояния идеального упругопластического тела в области пластического состояния является статически определимой. Поэтому, если граничные условия не содержат перемещений, то определение напряжений не зависит от деформированного состояния. Анализ упругого напряжённого состояния диска показывает, что в зависимости от величины радиуса диска в процессе нагружения зарождение пластической области может происходить или на границе $r = a$, или на границе $r = b$, или на границах $r = a$ и $r = b$ одновременно.

Будем полагать, что для всех условий пластичности общим является предел пластичности на одноосное растяжение.

В области $0 \leq r \leq a$ реализуется однородное напряжённое состояние $\sigma_r = \sigma_\varphi$, поэтому в этой части диска при переходе в пластическое состояние для любого условия пластичности будет выполняться режим $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k$. Из формул (1)–(3) (полагая $c_i = 0$, $c_e = b$, $p_e = p_b$) следует, что указанный переход выполняется, если

$$T_a = T_{in} = 2b^2(k_0 - p_b) / \left(2b^2 k_0 \xi + \alpha E \left(b^2 - a^2 - 2 \int_a^b f r dr \right) \right).$$

Если давление $p_b = 0$, то для любого условия пластичности на границе $r = b$ напряжения $\sigma_r = 0$, $\sigma_\varphi = k_0$. Температура T_a , при которой в пластическое состояние переходит только граница $r = b$, имеет вид $T_a = T_{ex} = (b^2 k_0) / \left(2\alpha E \int_0^b r f dr \right)$.

Рассмотрим случай, когда выбирается кусочно-линейное условие пластичности общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \max_{i=1 \div n} \{ \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r + \gamma_i \sigma_z \} &= k = k_0 (1 - \xi T), \\ \sigma_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если на границе $r = b$ давление $p_b \neq 0$ и выполняется режим пластичности $\alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r = k_0$, то $T_a = T_{ex} = b^2 ((\alpha_i + \beta_i) p_b + k_0) / \left(2\alpha E \int_0^b r f dr \right)$; для условия пластичности Мизеса имеем

$$T_a = T_{ex} = \frac{\left(p_b + \sqrt{4k_0^2 + 3p_b^2} \right) b^2}{2\alpha E \left(a^2 + 2 \int_a^b r f dr \right)}.$$

Когда общим выбирается не предел пластичности на одноосное растяжение, то алгоритм вычисления величин T_{in} и T_{ex} остаётся прежним, но формулы для их вычисления будут иными.

Равенство $T_{in} = T_{ex}$ позволяет определить радиус диска $b = b_k$, для которого одновременно на границах $r = a$ и $r = b$ зарождается пластическая область.

На рис.1, а, б и в, приведены графики T_{ex} и T_{in} до точки их пересечения $b = b_k$ при выборе условия пластичности Треска (сплошная линия), Шмидта – Ишлинского (точечная линия) и Мизеса (пунктирная линия). При выполнении всех численных расчётов выбраны следующие значения безразмерных параметров модели: $k_0 = 1$, $a = 1$, $\alpha E = 0,012$.

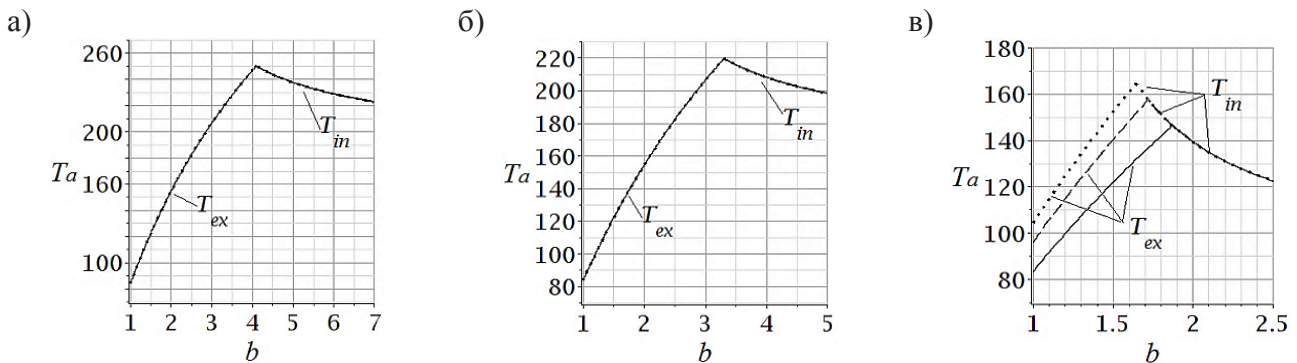


Рис. 1. Зависимость температур T_{ex} и T_{in} от радиуса диска для разных значений параметров:
 а – $p_b = 0$, $\xi = 0$; б – $p_b = 0$, $\xi = 0,0008(3)$; в – $p_b = 0,5$, $\xi = 0,0008(3)$

Результаты, представленные на рис.1, показывают следующее: 1) когда $b \leq b_k$ и $T_a = T_{ex}$, только граница диска $r = b$ переходит в пластическое состояние; 2) когда $b_k < b$ и $T_a = T_{in}$, только область $0 \leq r \leq a$ переходит в пластическое состояние; 3) когда $b = b_k$ и $T_a = T_{ex} = T_{in}$, в пластическое состояние переходит область $0 \leq r \leq a$ и граница диска $r = b$.

Также можно ввести следующую классификацию: 1) диски малого радиуса, когда $b < b_k$; 2) диски большого радиуса, когда $b_k < b$; 3) диски среднего радиуса, когда $b = b_k$.

При введении дополнительных условий предложенную классификацию дисков можно изменить. Например, можно найти такие значения $b = b_1 < b_k$ и $T_a = T_1$, для которых в пластическом состоянии будут находиться две области: внутренняя $0 \leq r \leq a$ и внешняя $c_e \leq r \leq b$, где c_e находится из некоторого определяемого условия. Тогда можно говорить о дисках малого радиуса, когда $b < b_1$, и о дисках среднего радиуса, когда $b_1 \leq b \leq b_k$. Так, если выбрано условие пластичности Шмидта – Ишлинского и $0 \leq p_b < 2/3k_0$, то b_1 и T_1 можно рассматривать как значения, для которых на границе $r = c_e$ выполняется условие смены режима пластичности:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi - 0,5\sigma_r &= k, \\ 0,5\sigma_\varphi - \sigma_r &= k. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для идеального пластического тела в области пластического состояния диска задача определения напряжений будет статически определимой [14]; она является начальной задачей для радиальной компоненты тензора напряжений.

Если рассматривается модель неидеального пластического тела, то в пластической области получаем статически неопределимую задачу.

Напряжения в зонах пластического состояния для условия пластичности (4) будут определяться по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k_0}{\alpha_i + \beta_i} \left(1 - \frac{\xi T_a}{\ln(b/a)} \left(\ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \right) + C_i r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{k_0}{\alpha_i + \beta_i} \left(1 - \frac{\xi T_a}{\ln(b/a)} \left(\ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{\beta_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \right) - \frac{\beta_i}{\alpha_i} C_i r^{-\frac{\alpha_i + \beta_i}{\alpha_i}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где C_i находится из условия $\sigma_r|_{r=r_i} = -p_i$, которое является или граничным, или следует из условия непрерывности напряжений.

Особо следует выделить условие пластичности Треска. Режимы этого условия пластичности соответствуют случаям: $\alpha_i + \beta_i = 0$, $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$. Для нахождения напряжений в пластической области необходимо выполнить предельный переход в формулах (6). Однако проще получить искомые формулы, непосредственно решая начальную задачу для указанных режимов пластичности.

В случае когда $\alpha_i + \beta_i = 0$, то

$$\sigma_r = \frac{k_0 \ln(b/r)}{\alpha_i} \left(\frac{\xi T_a \ln(b/r)}{2 \ln(b/a)} - 1 \right) + C_i, \quad \sigma_\varphi = \frac{k_0 \ln(b/r)}{\alpha_i} \left(\frac{\xi T_a (\ln(b/r) - 2)}{2 \ln(b/a)} - 1 \right) + \frac{k_0}{\alpha_i} + C_i.$$

Когда $\alpha_i = 0$, из условия пластичности следует, что $\sigma_r = \frac{k_0}{\beta_i} \left(1 - \frac{\xi T_a \ln(b/r)}{\ln(b/a)} \right)$ и из уравнения

равновесия $\sigma_\varphi = \frac{k_0}{\beta_i} \left(1 + \frac{\xi T_a (1 - \ln(b/r))}{\ln(b/a)} \right)$.

Эквивалентное напряжение

Для оценки напряжённого состояния определяем эквивалентные напряжения, которые связываем с условием пластичности. Для каждого i -го режима кусочно-линейное условие пластичности имеет следующий вид: $\sigma_{eq} = \alpha_i \sigma_\varphi + \beta_i \sigma_r$.

Внутренняя пластическая область

Если $b > b_k$ и $T_{in} < T_a$, то в области диска $0 \leq r \leq a$ реализуется режим полной пластичности: $\sigma_r = \sigma_\varphi = -k_a$, $k_a = k_0(1 - \xi T_a)$. Несложно проверить, что для условия пластичности Треска в обла-

сти $a \leq r \leq c_i$ из возможных режимов пластичности реализуется режим $\sigma_\varphi = -k_0(1 - \xi T)$, $-k_0(1 - \xi T_a) \leq \sigma_r \leq 0$, для которого $\sigma_r = -k - k_0 \xi T_a (1 - a/r) / \ln(b/a)$, $\sigma_\varphi = -k$. Для области диска $c_i \leq r \leq b$, находящейся в упругом состоянии, в формуле (3) надо полагать $c_e = b$, $p_e = p_b$. Радиус упругопластической границы $r = c_i$ определяется, например, из условия непрерывности окружного напряжения на этой границе (квадратные скобки используем для обозначения скачка величин при переходе через границу): $[\sigma_\varphi]_{r=c_i} = 0$. Значение температуры $T_a = T_1$, при которой на границе $r = b$ области упругого состояния диска, будет выполняться условие $\sigma_\varphi - \sigma_r = k$ ($0 \leq pb$).

На рис. 2, а, б и в, приведены графики распределения напряжений, эквивалентного напряжения для возможных режимов пластичности условия Треска и годографа вектора напряжений. Выбраны следующие значения параметров: $T_a = 340$, $\xi = 0,0008$, $c_i = 2,1$.

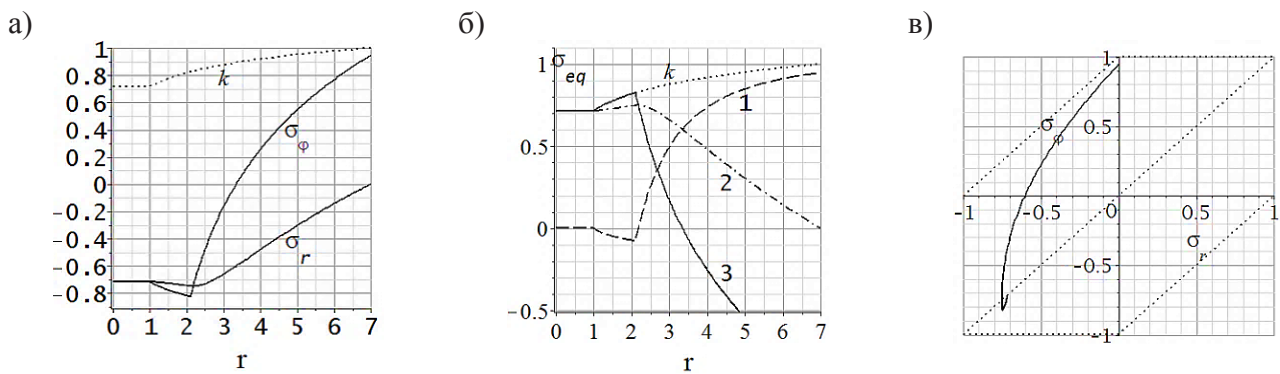


Рис. 2. Графики: а – распределения радиального, окружного напряжений и предела пластичности; б – эквивалентных напряжений для режимов пластичности 1 \rightarrow $\sigma_\varphi - \sigma_r$, 2 \rightarrow $-\sigma_r$, 3 \rightarrow $-\sigma_\varphi$; в – годографа напряжений

Две пластические области

На рис. 3, а, б, в, показаны графики распределения напряжений, эквивалентного напряжения для возможных режимов пластичности условия Шмидта – Ишлинского и годографа вектора напряжений для диска малого радиуса $b < b_k$. Выбраны следующие значения параметров: $T_a = T_1 = 336,69$; $b = b_1 = 2,25$; $c_e = 1,34$; $p_b = 0$. В пластическом состоянии находится ядро диска $0 \leq r \leq a$ и область $c_e \leq r \leq b$. На границе $r = c_e$ выполняется сингулярный режим пластичности (5).

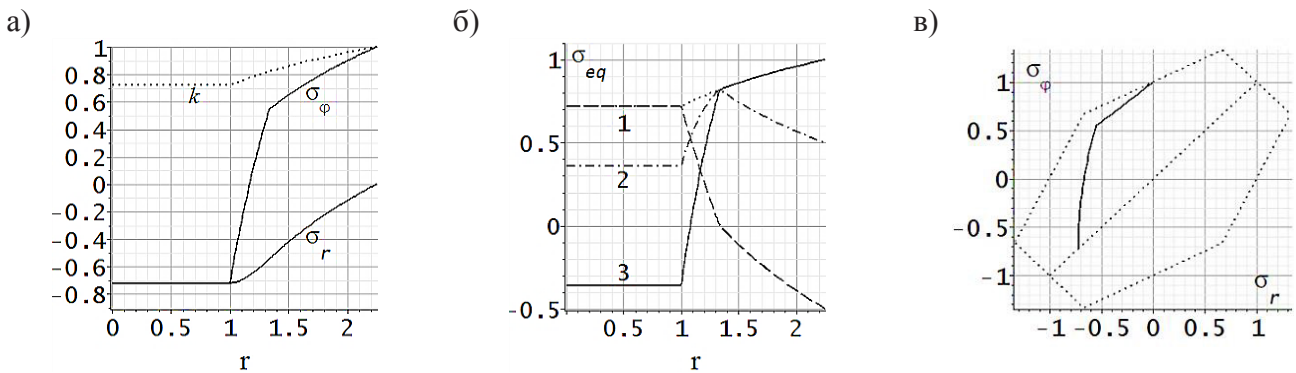


Рис. 3. Графики: а – распределения радиального, окружного напряжений и предела пластичности; б – эквивалентных напряжений для режимов пластичности 1 \rightarrow $\sigma_\varphi - \sigma_r$, 2 \rightarrow $-\sigma_r$, 3 \rightarrow $-\sigma_\varphi$; в – годографа напряжений



Алгоритмы решения задачи для иных режимов пластичности и дисков малых и средних радиусов для других условий пластичности не имеют принципиальной оригинальности по отношению к рассмотренному примеру. Зная напряжённое состояние, определение деформационного состояния можно свести к использованию известных определяющих соотношений.

Вопросы, связанные с процессом разгрузки тел цилиндрической формы, подробно рассматривались в работах А. А. Буренина и его учеников [3 – 7] и поэтому в настоящей статье не затрагиваются.

Выводы

Вид формулы для напряжений и деформаций зависит от выбранного алгоритма решения задачи. Все различные формулы для конкретной величины приводимы одна к другой. Графики для эквивалентных напряжений и годографа вектора напряжений используем для контроля полученного решения для напряжённого состояния. Вопросы построения алгоритма решения рассмотренной выше конкретной задачи характерны для большинства аналогичных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. О напряжённом состоянии тонкого диска с учётом зависимости предела текучести от температуры / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Г. Г. Бердзенишвили, И. И. Переславская // Инженерный сборник Дона. – 2017. – № 3. – С. 1-8.
2. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
3. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
4. Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе нагрева охлаждения / А. А. Буренин, Е. П. Дац, С. Н. Мокрин, Е. В. Мурашкин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2013. – № 2. – С. 22-28.
5. Буренин, А. А. К моделированию технологии горячей посадки / А. А. Буренин, Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17. – № 3. – С. 40-47.
6. Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2014. – № 2. – С. 124-131.
7. Дац, Е. П. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учёте пластических течений / Е. П. Дац, А. В. Ткачева // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 208-216.
8. Mack, W. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflächenförmigen Wärmequelle / W. Mack, U. Gamer // Forschung im Ingenieurwesen. – 1985. – № 5(51). – P. 160-164.
9. Orcan, Y. Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder / Y. Orcan // Acta Mechanica. – 1991. – Vol. 90. – P. 61-80.
10. Bengeri, M. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit / M. Bengeri, W. Mack // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 103. – P. 243-257.
11. Arslan, E. Effect of a temperature cycle on a rotating elastic-plastic shaft / E. Arslan, W. Mack, A. N. Eraslan // Acta Mechanica. – 2008. – Vol. 195. – P. 129-140.
12. Dats, E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk / E. Dats, E. Murashkin // Proceedings of the World Congress on Engineering. – 2016. – Vol 1. – P. 69-72.
13. Dats, E. On unsteady heat effect in center of the elastic-plastic disk / E. Dats, E. Murashkin // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. – 2016. – Vol. – 2223. – P. 69-72.
14. Timoshenko, S. R. Theory of elasticity / S. R. Timoshenko. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 428 p.

Буренин А. А., Матвеев В. П., Ткачева А. В.
A. A. Burenin, V. P Matveenko, A. V. Tkacheva

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ СБОРКИ ДВУХСЛОЙНОГО ВАЛА
СПОСОБОМ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ**

**TEMPERATURE VOLTAGES WHEN ASSEMBLING THE TWO-LAYER SHAFT
WITH THE HOT CHARGING METHOD**

Буренин Анатолий Александрович – член-корреспондент Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallurgov, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: mail@imim.ru.
Mr. Anatoliy A. Burenin – Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Principal researcher of the Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: mail@imim.ru.

Матвеев Валерий Павлович – академик Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (Россия, Пермь); 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1; тел.: +7 (342) 237-84-61. E-mail: mvp@icmm.ru.

Mrs. Valery P. Matveenko – Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director of the Institute of Continuum Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Perm); 614013, Perm, 1 Academician Korolev str.; tel.: +7 (342) 237-84-61. E-mail: mvp@icmm.ru.

Ткачева Анастасия Валерьевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallurgov, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: 4nansi4@mail.ru.

Ms. Anastasia V. Tkacheva – PhD in Physics and Mathematics, researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: 4nansi4@mail.ru.

Аннотация. Изучена эволюция температурных напряжений в процессе сборки биметаллического вала способом горячей посадки трубы на вал. Показано, что при использовании условий максимальных приведённых касательных напряжений в качестве пластического потенциала имеется возможность провести расчёты без дискретизации областей пластического течения. Предложенный алгоритм расчётов последовательными шагами по времени позволяет указать время и место возникновения пластических областей и их исчезновения в процессе нагрева и последующего остывания.

Summary. The evolution of temperature stresses when assembling bimetallic rolls is studied. It is shown that when using the conditions of maximum reduced tangential stresses as a plastic potential, it is possible to perform calculations without discretizing the regions of plastic flow. The proposed algorithm for calculating successive steps in time allows specifying the time and place of plastic areas occurrence and their disappearance when heating and subsequent cooling.

Ключевые слова: упругость, идеальная пластичность, условия пластичности Ишлинского – Ивлева, температурные напряжения, сборка с натягом, горячая посадка.

Key words: elasticity, ideal plasticity, conditions of plasticity of Ishlinsky – Ivlev, temperature stresses, tight fit assembly, hot charging.

УДК 539.374



Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Введение

Технологическая операция сборки металлоконструкций из цилиндрических деталей способом их горячей посадки восходит к предложению выдающегося инженера-механика, экстраординарного академика Петербургской академии наук А. В. Гадолина. Предложенный им способ повышения прочностных свойств стволов артиллерийских орудий без увеличения веса состоял именно в двухслойной сборке как раз способом горячей посадки. Такая конструкция позволяла выдерживать повышенные давления пороховых газов и потому приводила к существенному увеличению дальности стрельбы. С тех пор горячая посадка является одной из основных в ряду технологических операций сборки с натягом. Методическое обеспечение расчётов данной технологии базируется в основном на теории температурных напряжений в упругих телах [1; 2], то есть проявлением в процессе сборки пластических свойств материалов сопрягаемых деталей пренебрегают. Оправдание тому находят в существенном усложнении математического аппарата, который требует более сложных вычислительных алгоритмов и программ расчётов [18; 3]. Возникающие и продвигающиеся по деформируемым элементам сборки упругопластические границы разделяют расчётную область на части, в которых деформирование подчинено разным системам уравнений. Граничные поверхности при этом остаются необходимым элементом решения краевых задач теории, положение их следует отслеживать в процессе расчётов. Также алгоритмически обязаны отслеживаться моменты времени и места возникновения и исчезновения таких граничных поверхностей. Непостоянство границ расчётных областей, их деление и смыкание существенно затрудняет использование наработанных процедур и методов численных расчётов. Только современные вычислительные возможности позволили решить ряд простейших задач теории термоупругопластичности [4 – 7; 13; 15 – 17] и теории неустановившихся температурных напряжений в условиях горячей посадки [8; 9; 12; 14] в частности.

Существенные упрощения в математическом аппарате теории и его алгоритмизации для численных расчётов достигаются при использовании кусочно-линейных пластических потенциалов. К последним относятся классические условия пластичности [10; 11] максимальных касательных напряжений (условие Треска – Сен-Венана) и максимальных приведённых касательных напряжений (условие Ишлинского – Ивлева). Но в таком случае встречаем иную сложность: в процессе эволюции температурных напряжений уже пластические области могут разделяться на части, в которых пластическое течение подчиняется разным системам уравнений в зависимости от принадлежности напряжённых состояний разным граням и рёбрам поверхности нагружения. Следовательно, число подвижных граничных поверхностей увеличивается, как и число расчётных областей, где интегрировать необходимо разные системы уравнений и сопрягать такие решения на подвижных границах. Тем не менее в [9] с использованием условия Треска – Сен-Венана было показано, что во всех возможных случаях одномерную систему уравнений в задаче горячей посадки трубы на вал можно записать в перемещениях и проинтегрировать. Таким способом следуют конечные соотношения, позволяющие представить напряжения и деформации в каждый рассчитываемый момент времени в зависимости от распределения температуры по элементам сборки. Таким способом удаётся избежать дискретизации расчётных областей и в условиях зависимости предела текучести от температуры отследить возникновения и исчезновения различных областей течения, включая повторные (обратные) пластические течения.

Здесь рассмотрим посадку трубы на вал так же, как и в [9], но с двумя существенными отличиями. Первое такое отличие приближает задачу теории температурных напряжений в упругопластических телах к технологическим условиям операции сборки горячей посадкой непосредственно в промышленности, а именно: до момента посадки охватываемая деталь сборки (труба) уже имеет в себе необратимые (пластические) деформации, вызванные её нагревом по внутренней поверхности, а распределение температуры по её радиусу неоднородно (в отличие от [9]). Второе отличие связано с использованием кусочно-линейного условия пластического течения Ишлинского – Ивлева, а не условия Треска – Сен-Венана. Это вносит новые особенности [7] в методику рас-

чѐтов, так как пластические области могут зарождаться не только на контактной поверхности (как в [9]), но и внутри области деформирования.

Исходные соотношения математической модели. Постановка задачи

Деформации e_{ij} полагаются малыми и складывающимися из обратимой e_{ij}^e и необратимой (пластической) составляющих e_{ij}^p :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации вместе с температурой T задают напряжения σ_{ij} в материале

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e. \quad (2)$$

В (2) λ , μ , $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – упругие модули материала тела; α – коэффициент линейного расширения; T_0 – начальная (комнатная) температура, при которой осуществляется свободное состояние. Пластические деформации растут в условиях соответствия напряжённых состояний поверхности $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ нагружения в пространстве напряжений. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [10] уравнение поверхности нагружения является пластическим потенциалом и следует ассоциированный закон пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \varphi \frac{\partial f(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \varphi > 0. \quad (3)$$

В качестве поверхности нагружения здесь принимаем поверхность наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений:

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4)$$

Предел текучести k в (3) и (4) считаем зависимым от температуры:

$$k = k_0 \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_0} \right)^2. \quad (5)$$

В (5) k_0 – предел текучести при температуре T_0 ; T_p – температура плавления материала.

Прежде чем перейти к операции посадки нагреем охватывающую трубу. В случае посадки крупногабаритных деталей нагрев трубы осуществляют подводом тепла к её внутренней поверхности. Так, если длинная труба имеет размеры $R \leq r \leq R_2$, то подводом тепла добиваются, чтобы радиус её внутренней поверхности оказался равен радиусу вала $r = R_1$. Процесс нагрева задаётся уравнением теплопроводности

$$T_{,t} = a(T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}); \quad (6)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} T_{,t} \Big|_{r=R_1} &= q, \\ \Psi_1 T_{,r} \Big|_{r=R_2} &= \chi(T - T_0), \\ T \Big|_{t=0} &= T_0. \end{aligned} \quad (7)$$



В (6) и (7) a – коэффициент температуропроводности; q – скорость подвода тепла; ψ_1 – коэффициент теплопроводности материала трубы; χ – коэффициент теплоотдачи от поверхности трубы в окружающую среду. Последний существенно зависит от геометрии трубы, теплофизических свойств окружающей среды и др. Далее будем считать его постоянным. Равенство $R = R_1$ достигается в некоторый момент времени $t = t_*$, являющийся моментом посадки трубы на вал, находящийся при температуре T_0 . Краевыми условиями для последующего процесса теплопроводности будут

$$\begin{aligned} T^{(1)}\Big|_{r=R_1} &= T^{(2)}\Big|_{r=R_1}, \\ \psi_2 T^{(2)}\Big|_{r=R_1} &= \psi_1 T^{(1)}\Big|_{r=R_1}, \\ \psi_1 T^{(1)}\Big|_{r=R_2} &= \chi(T_0 - T), \end{aligned} \quad (8)$$

где $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ – температура трубы и вала соответственно; ψ_1 – коэффициент теплопроводности материала вала.

Распределение температуры по сборке определяется численно без дополнительных трудностей в любой момент времени решением уравнения (6) с условиями (7) (до момента посадки) или (8) (после момента посадки). Далее считаем его известным (найденным). В предлагаемом алгоритме расчётов распределение температуры приходится вычислять на каждом последовательном временном шаге расчётов.

Деформирование охватывающей трубы до посадки

При нагреве трубы в ней растут деформации и, следовательно, напряжения. Первоначально деформирование обратимо: $e_{ij} = e_{ij}^e$. Следуя (2) в используемой далее цилиндрической системе координат (r, φ, z) , имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu)e_r + \lambda e_\varphi - 3\alpha K T_0 \theta, \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu)e_\varphi + \lambda e_r - 3\alpha K T_0 \theta, \\ \sigma_r &= \lambda(e_r + e_\varphi) - 3\alpha K T_0 \theta, \\ \theta &= \frac{T - T_0}{T_0}; \quad e_r = u_{r,r}; \quad e_\varphi = r^{-1}u_r. \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка (9) в уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (10)$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для u_r :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{\alpha T_0 K}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (11)$$

Полагая, что в данный момент времени $\theta(r)$, известной из решения температурной задачи (6)–(7), для распределения перемещения и напряжений после интегрирования (11) запишем следующее:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{3\alpha K T_0}{(\lambda + 2\mu)r} \int_R^r x\theta(x,t) dx + \frac{r}{2} C_1(t) + \frac{C_2(t)}{r}, \\
 \sigma_r &= (\lambda + \mu) C_1(t) - 2\mu r^{-2} C_2(t) - 6\alpha\mu T_0 \int_R^r x\theta(x,t) dx, \\
 \sigma_\varphi &= (\lambda + \mu) C_1(t) + 2\mu r^{-2} C_2(t) + 6\alpha\mu K (\lambda + \mu)^{-1} T_0 \left(\int_R^r x\theta(x,t) dx - \theta(x,t) \right), \\
 \sigma_z &= \lambda C_1(t) - 6\alpha\mu K (\lambda + \mu)^{-1} T_0 \theta(x,t).
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

В расчётный момент времени значения функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находим, выполняя граничные условия:

$$\sigma_r \Big|_{r=R} = \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0.
 \tag{13}$$

Следовательно, на каждом шаге по времени следует определить распределение температуры $\theta(r)$ решением задачи (6)–(7) и, воспользовавшись зависимостями (12), решить систему линейных алгебраических уравнений (13) для вычисления значений C_1 и C_2 . После этого задачу на данном временном шаге можно считать решённой, а распределения температуры, перемещений и напряжений по радиусу трубы найденными. В отличие от температурной задачи в решении механической наличие зависимостей (12) позволяет обойтись без дискретизации расчётной области $R \leq r \leq R_2$. Далее будет показано, что подобная процедура возможна даже при наличии разных областей пластического течения.

Продолжая такие расчёты, далее последовательными шагами по времени замечаем, что на границе $r = R$ в некоторый момент времени $t_1 > 0$ выполняется условие пластичности Ильинского – Ивлева (4) в форме $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$. На рис. 1 показано сечение наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

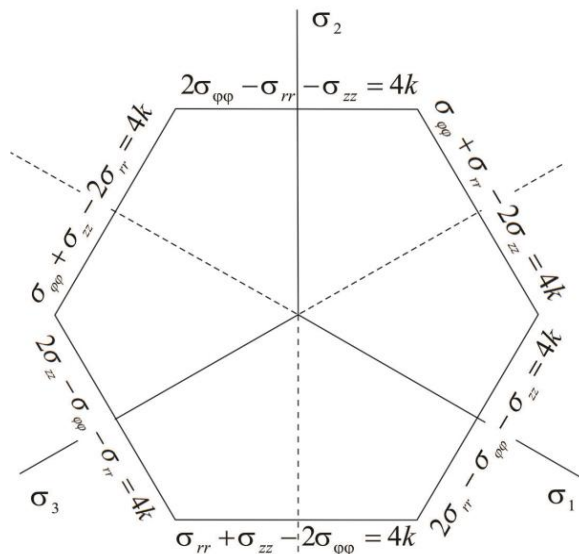


Рис. 1. Сечение поверхности нагружения девиаторной плоскостью

При $t > t_1$ имеем развивающуюся область пластического течения $R \leq r \leq n_1(t)$ (см. рис. 1) с продвигающейся по материалу трубы упругопластической границей $r = n_1(t)$; напряжённые со-

стояния в этой области фиксируются своей принадлежностью данной грани наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений.

Соотношения закона Дюамеля – Неймана (2) переписуются в пластической области в форме

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)(u_{r,r} - e_r^p) + \lambda(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_\varphi &= \lambda(u_{r,r} - e_r^p) + (\lambda + 2\mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(r^{-1}u_r + u_{r,r} - e_\varphi^p - e_r^p) - 3\alpha KT_0\theta.\end{aligned}\quad (14)$$

Необратимые деформации исключаем из (14), выполняя условие пластичности $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$ и ассоциированный закон пластического течения, следствием которого на данной грани призмы Ивлева является соотношение $e_r^p = -2e_\varphi^p$. Таким способом уравнение равновесия (10) в области течения приводится к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - h^2 \frac{u_r}{r^2} &= \frac{2}{3K} \left(\frac{2\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ h &= \sqrt{\frac{3\lambda + 5\mu}{3\lambda + 2\mu}}.\end{aligned}\quad (15)$$

Считаем, что в рассматриваемый момент времени распределения температуры $\theta(r)$ и, следовательно, $k(r)$ предварительно найдены решением температурной задачи (6)–(7). Тогда, после интегрирования (15), найдём

$$\begin{aligned}u_r(r, t) &= 1,5h^{-1}((h+1)\Phi(r, s, h) + (h-1)\Phi(r, s, -h)) + \\ &+ (3Kh)^{-1}((2h-1)\Psi(r, s, h) - (2h+1)\Psi(r, s, -h)) - (2hr^h)^{-1}C_1^{(2)}(t) + r^h C_2^{(2)}(t), \\ \sigma_r &= 1,5K(hr)^{-1}(h^2 - 1)(\Phi(r, s, -h) - \Phi(r, s, h)) - \\ &- (3hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Psi(r, s, h) + (h+1)(2h+1)\Psi(r, s, -h)) + \\ &+ (h-1)(2hr^{h+1})^{-1}KC_1^{(2)}(t) + (h+1)(r^{h-1})KC_2^{(2)}(t), \\ \sigma_\varphi &= -\Psi(r, s, -h)(3Krh)^{-1}(2h+1)(K(h+1) + \mu) - \\ &- \Psi(r, s, h)(3Krh)^{-1}(2h-1)(K(1-h) + \mu) + \\ &+ 1,5\Phi(r, s, -h)(h-1)(rh)^{-1}(K(h+1) + \mu) + \\ &+ 1,5\Phi(r, s, h)(h+1)(rh)^{-1}(K(1-h) + \mu) - \\ &- 2k - (K(1-h) + \mu)(2hr^{h+1})^{-1}C_1^{(2)}(t) + (K(h+1) + \mu)(r^{h-1})C_2^{(2)}(t), \\ e_r^p &= -2e_\varphi^p = 2\alpha T_0\theta - 2(2\mu + \lambda)(3\mu K)^{-1}k + \\ &+ (4h^2 - 1)(9Khr)^{-1}(\Psi(r, s, h) - \Psi(r, s, -h)) + \\ &+ (2hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Phi(r, s, -h) - (h+1)(2h+1)\Phi(r, s, h)) + \\ &+ (2h+1)(6hr^{h+1})^{-1}C_1^{(2)}(t) + 3^{-1}(2h-1)(r^{h-1})C_2^{(2)}(t).\end{aligned}\quad (16)$$

$$\Phi(r, s, h) = \alpha T_0 r^{-h} \int_s^r \rho^h \theta(\rho) d\rho; \quad \Psi(r, s, h) = r^{-h} \int_s^r \rho^h k(\rho) d\rho; \quad s = R.$$

Теперь, как и ранее, следует в (16) определить значение функций $C_1^{(2)}(t)$, $C_2^{(2)}(t)$ в этот рассматриваемый момент времени, выполняя соответственно переписанные граничные условия (13).

Неизвестным оказывается и положение упругопластической границы $n_1(t)$ в этот же момент времени, но при этом добавляются условия на упругопластической границе (выход на грань поверхности нагружения, непрерывность напряжений σ_r , перемещений u_r , обратимых и необратимых деформаций). Своего перерасчёта для данного момента времени требуют и $C_1^{(1)}(t)$, $C_2^{(1)}(t)$.

Для пяти таких неизвестных из краевых условий и условий на упругопластической границе следует пять алгебраических уравнений. Такой перерасчёт приходится производить на каждом временном шаге расчётов. Далее на нём останавливаться не будем, несмотря на то что число неизвестных и уравнений будет расти вследствие появления новых областей течения и областей обратимого деформирования при присутствии в них необратимых деформаций.

В некоторый последующий момент времени $t_2 > t_1$ на упругопластической границе наряду с условием пластичности $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$ выполнится ещё и условие $\sigma_r + \sigma_\varphi - 2\sigma_z = 4k$. Данное обстоятельство является расчётным фактом. В этот момент времени от продолжающей продвигаться поверхности $r = n_1(t)$ начинают своё движение две поверхности: $r = n_2(t)$ и $r = n_3(t)$. Причём если поверхность $r = n_3(t)$ является новой упругопластической границей, движущейся в сторону внешней поверхности трубы, то поверхность $r = n_2(t)$ движется в обратную сторону. Таким способом зарождаются две области пластического течения (см. рис. 2). В области $n_2(t) \leq r \leq n_3(t)$ течение происходит в соответствии с напряжениями, удовлетворяющими условию грани призмы Ивлева $\sigma_r + \sigma_\varphi - 2\sigma_z = 4k$, то есть уже иной грани (см. рис. 1). Пластическое течение в области $n_2(t) \leq r \leq n_1(t)$ задаётся напряжениями, соответствующими ребру призмы Ивлева (см. рис. 1 и 2).

В это же время в области $R \leq r \leq n_2(t)$ продолжается пластическое течение с напряжениями, удовлетворяющими условию их принадлежности прежней грани поверхности нагружения: $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$. В каждой из вновь образовавшихся областей необратимого деформирования с помощью следствия ассоциированного закона пластического течения можно уравнение равновесия записать в перемещениях и проинтегрировать, как это происходило при выводе (15) и получении зависимостей (16). Опуская такие несложные вычисления, запишем аналог (16) для вновь образовавшихся областей пластического течения. В пластической области $n_2(t) \leq r \leq n_1(t)$ (ребро призмы Ивлева) будем иметь

$$\begin{aligned}
 u_r &= -\frac{2}{3K}(\Psi(r,s,1) + \Psi(r,s,-1)) + 3\Phi(r,s,1) + \frac{r}{2K}C_1^{(3)}(t) + \frac{C_2^{(3)}(t)}{r}, \\
 \sigma_r &= -\frac{4}{3r}\Psi(r,s,-1) + C_1^{(3)}(t), \\
 \sigma_\varphi &= -\frac{4}{3r}\Psi(r,s,-1) - \frac{4}{3}k(r) + C_1^{(3)}(t), \\
 \sigma_z &= -\frac{4}{3r}\Omega(r,s,-1) - \frac{8}{3}k(r) + C_1^{(3)}(t), \\
 e_r^p &= -3r^{-1}\Phi(r,s,1) + 2\alpha T_0\theta(r) - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{3\mu K}k(r) + \frac{2}{3rK}(\Psi(r,s,1) - 3^{-1}\Psi(r,s,-1)) + \\
 &\quad + \frac{C_1^{(3)}(t)}{6K} - \frac{C_2^{(3)}(t)}{r^2} - p_r(r), \\
 e_\varphi^p &= \frac{4}{9Kr}\Psi(r,s,-1) + \frac{2(3K + 2\mu)}{9\mu K}k(r) - \alpha T_0\theta(r) - \frac{C_1^{(3)}(t)}{3K} - p_\varphi(r), \\
 &\quad s = n_2(t).
 \end{aligned} \tag{17}$$

активный нагрев материала с внутренней стороны трубы

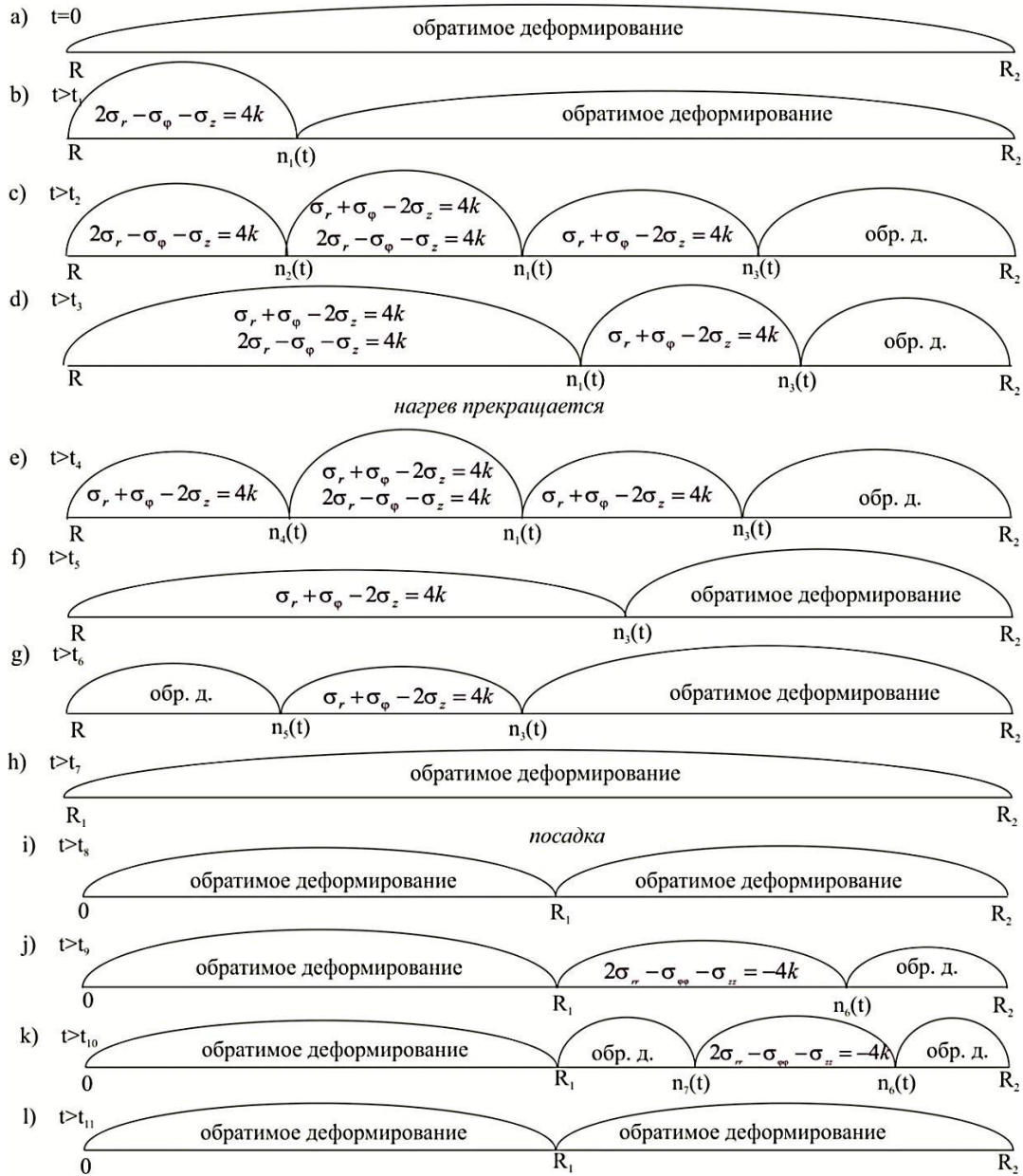


Рис. 2. Схематичное представление возникновения и исчезновения различных областей пластического деформирования

Аналогично для пластической области $n_1(t) \leq r \leq n_3(t)$ (грань призмы Ивлева) запишем

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{3K}{K+\mu} \Phi(r, s, 1) - \frac{2}{3(K+\mu)} \Psi(r, s, 1) + \frac{1}{2} r C_1^{(4)}(t) + \frac{C_2^{(4)}(t)}{r}, \\
 \sigma_r &= \frac{4\mu}{3r(K+\mu)} \Psi(r, s, 1) - \frac{6\mu K}{r(K+\mu)} \Phi(r, s, 1) + K C_1^{(4)}(t) - \frac{2\mu C_2^{(4)}(t)}{r^2}, \\
 \sigma_\varphi &= \frac{4\mu}{3(K+\mu)} \left(k(r) - \frac{\Psi(r, s, 1)}{r} \right) + \frac{6\mu K}{K+\mu} \left(\frac{\Phi(r, s, 1)}{r} - \alpha T_0 \theta(r) \right) + K C_1^{(4)}(t) + \frac{2\mu C_2^{(4)}(t)}{r^2}, \\
 e_r^p(r, t) &= \frac{\alpha T_0 K}{2(K+\mu)} \theta(r) - \frac{\lambda + 2\mu}{3\mu(K+\mu)} k(r) + \frac{1}{6} C_1^{(4)}(t), \quad s = n_1(t).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Для вычислений значений функций времени в рассчитываемый момент времени и положений граничных поверхностей $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ теперь следует разрешить систему одиннадцати алгебраических уравнений, следующих из краевых условий и условий на таких продвигающихся поверхностях.

Зависимости (17) включают в себя накопленные при предыдущем необратимом деформировании при напряжениях, соответствующих грани $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = 4k$ призмы Ивлева, деформации p_r и p_φ . Это деформации $e_r^p(t, r)$ и $e_\varphi^p(t, r)$ в момент прихода к данной точке с текущей координатой r поверхности $n_2(t)$. В процессе расчётов массивы накопленных, но далее со временем не изменяющихся необратимых деформаций следует алгоритмически формировать для целей дальнейших расчётов. Это является неотъемлемой частью построенного алгоритма расчётов и его программной реализации. Далее на таком обстоятельстве останавливаться не будем, но оно постоянно будет иметь своё место.

С увеличением времени нагрева быстро (по сравнению с другими) перемещается поверхность $r = n_2(t)$ и достигает внутренней поверхности трубы. Далее пластическое течение (см. рис. 2) будет происходить только в двух пластических областях: $R \leq r \leq n_2(t)$ и $n_1(t) \leq r \leq n_3(t)$ в соответствии с зависимостями (17) и (18), а температура на поверхности $r = R$ достигает требуемого технологического уровня. Нагревание прекращается и готовится операция посадки. За последний промежуток времени происходит разгрузка трубы. Тщательные расчёты показывают, что на поверхности $r = R$ зарождается упругопластическая разгружающая граница $r = n_4(t)$, а граничные поверхности $n_1(t)$ и $n_3(t)$ начинают своё движение в обратную сторону (см. рис. 2, e). При таком их продвижении необходимо учитывать накопленные ранее необратимые деформации вида $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$ в качестве необходимых начальных условий для последующего их расчёта. Наличие их сказывается и в записи уравнения равновесия в перемещениях, так при движении теперь разгружающей упругопластической границы $r = n_3(t)$ последняя оставляет область обратимого деформирования, но уравнение (11) и зависимости (12) в этой области уже несправедливы. Они обязаны быть дополнены присутствием накопленных необратимых деформаций. При дальнейшем остывании на поверхности $r = R$ возникает новая разгружающая упругопластическая граница $r = n_5(t)$ (см. рис. 2, d). Двигаясь навстречу поверхности $r = n_1(t)$ и $r = n_3(t)$, приводит к исчезновению области пластического течения. При недостаточности времени до посадки трубы на вал последнее может не произойти. Полагаем всё же, что такого промежутка времени достаточно и посадка произойдёт в то время, когда пластические области в материале трубы прекратят своё существование.

Предположение о малости деформаций не позволяет проследить за изменением объёма трубы при нагревании, далее будем считать, что в момент посадки трубы на вал её внутренний радиус совпадает с радиусом вала: $R = R_1$.

До момента посадки считаем, что вал находится в свободном состоянии при однородной температуре $T = T_0$ ($\theta = 0$). Первоначально и вал, и труба деформируются обратимо (термоупруго) (см. рис. 2, i). Но с некоторого момента времени, как указывают расчёты, в материале трубы начинается пластическое течение при напряжениях, соответствующих грани $2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z = -4k$ призмы Ивлева. Знак «минус» в правой части уравнения этой грани в пространстве главных напряжений указывает, что данное повторное пластическое течение является обратным, оно может приводить к понижению в уровне необратимых деформаций. Развитие повторного пластического течения связано с продвижением новой упругопластической границы $r = n_6(t)$. В записи уравнения равновесия для данной области $R_1 \leq r \leq n_6(t)$ (см. рис. 2, j) следует учитывать массив накопленных ранее необратимых деформаций $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Так же, как и ранее, на каждом временном шаге расчётов граничным условиям удовлетворяем при вычислении значений неизвест-

ных функций времени, следующих при интегрировании уравнения равновесия. К таким условиям добавляется условие на упругопластической границе $r = n_6(t)$, и таким способом указываем положение границ в каждый момент времени. Дальнейшее остывание сборки порождает разгружающую упругопластическую границу $r = n_7(t)$ (см. рис. 2, *k*), которая в своём продвижении по материалу трубы догоняет упругопластическую границу $r = n_6(t)$, и далее материал трубы и вала деформируется обратимо (см. рис. 2, *l*) до полного остывания сборки.

Объём настоящей статьи не позволяет графически проиллюстрировать эволюции напряжённых состояний в течение всей технологической операции. Укажем здесь только распределение итоговых остаточных напряжений. На рис. 3 такое распределение безразмерных напряжений приведено при следующих исходных параметрах задачи: температура нагрева поверхности $r = R$ трубы $310\text{ }^\circ\text{C}$; геометрические размеры трубы и вала $R_1 = 0,05\text{ м}$, $R_2 = 0,1\text{ м}$; постоянные материала трубы $\rho = 2,8 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$; $\chi = 130\text{ Вт/(мК)}$; $c_p = 0,922\text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$; $\alpha = 22,9 \cdot 10^{-6}$; $k_0 = 255\text{ МПа}$; $T_p = 660\text{ }^\circ\text{C}$; $E = 72\text{ ГПа}$; $\nu = 0,3$; постоянные материала вала $\rho = 2,7 \cdot 10^3\text{ кг/м}^3$; $\chi = 188\text{ Вт/(мК)}$; $c_p = 0,903\text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$; $\alpha = 23,4 \cdot 10^{-6}$; $k_0^{(1)} = 210\text{ МПа}$; $T_p = 660\text{ }^\circ\text{C}$; $E = 70\text{ ГПа}$; $\nu = 0,3$.

Заключение

Здесь замечено, что в расчётах неустановившихся температурных напряжений хотя бы в одномерных задачах имеется возможность провести расчёты в каждый момент времени без дискретизации изменяющихся расчётных областей. Такую возможность предоставляет использование классических пластических потенциалов (условие пластичности Треска – Сен-Венана и Ишлинского – Ивлева). Однако такое изменение несёт в себе качественное отличие: если переход к течению в состояниях полной пластичности (в условиях ребра наклонной призмы Треска) всегда [9] начинается с границы деформируемого тела, то аналогичный переход (к условию ребра наклонной призмы Ивлева) необходимо осуществлять на упругопластических границах (см. рис. 2, *c*). Рекомендовать кусочно-линейные классические условия пластичности для конкретных расчётов затруднительно, оба они имеют свои преимущества и недостатки. Условие Треска – Сен-Венана, как правило, даёт наименьший уровень температурных напряжений, а условие Ишлинского – Ивлева – наибольший [7]. То же относится и к натягу в сборке.

Подготовленный на основе результатов настоящей статьи программный модуль позволяет отслеживать появление и исчезновение областей пластического течения, автоматически формирует массив распределения накопившихся и далее не изменяющихся необратимых деформаций для целей его интегрирования в областях обратимого деформирования с присутствием необратимых и в областях изменившегося характера пластического течения.

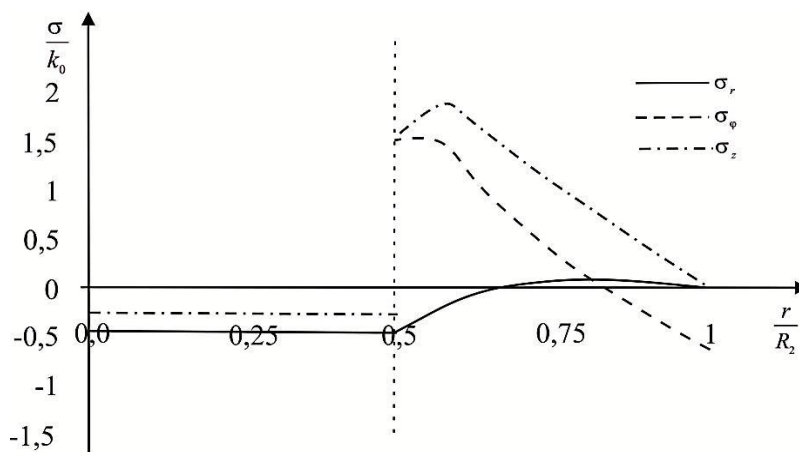


Рис. 3. Остаточные напряжения в материале сборки

Главной задачей в подготовке настоящей публикации было указание характерных особенностей в постановках (зарождение течения, деление пластических областей) в решении задачи сборки горячей посадкой. Протекание процесса возникновения и деления областей пластического течения иллюстрирует рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берникер, Е. И. Посадка с натягом в машиностроении: справ. пособие / Е. И. Берникер. – Л.: Машиностроение, 1966. – 168 с.
2. Боли, Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер; пер. с англ. под ред. Э. И. Грилюка. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
3. Шевченко, Ю. Н. Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности / Ю. Н. Шевченко, П. А. Стеблякко, А. Д. Петров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.– 2014. – № 22. – С. 250-264.
4. Александров, С. Е. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению / С. Е. Александров, Е. В. Ломакин, Й.-Р. Дзенг // ДАН. – 2012. – Т. 443. – № 3. – С. 310-312.
5. Александров, С. Е. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряжённое состояние в тонком полом диске / С. Е. Александров, Е. А. Лямина, О. В. Новожилова // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2013. – № 3. – С. 43-48.
6. Буренин, А. А. Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия / А. А. Буренин, Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2014. – № 2. – С. 124-131.
7. Дац, Е. П. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности / Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела.– 2018.– № 1.– С. 32-43.
8. Дац, Е. П. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки / Е. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4(22). – С. 204-213.
9. Буренин, А. А. К расчёту неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах / А. А. Буренин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10. – № 3. – С. 245-259.
10. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
11. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
12. Bengeri, M. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit / M. Bengeri, W Mack // Acta Mechanica. – 1994. – Vol. 103. – P. 243-257.
13. Gamer, U. F. A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub / U. F. Gamer // Int. J. Solids. Struct. – 1992. – Vol. 29. – P. 2463-2469.
14. Kovacs, A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. Periodica Polytechnica. / A. Kovacs // Ser. Mech. Eng. – 1996. – Vol. 40. – №. 2. – P. 103-112.
15. Lippmann, H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit / H. Lippmann // Int. J. Plasticity. – 1992. – Vol. 8. – P. 567-582.
16. Mack, W. Thermal assembly of an elastic-plastic hub and a solid shaft / W. Mack // Arch. Appl. Mech. – 1993. – Vol. 63. – P. 42-50.
17. Ohno, N. Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions / N. Ohno, J. D. Wang: Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions // Int. J. Plasticity. – 1992. – Vol. 7. – P. 879-891.
18. Perzyna, P. Problems of thermoplasticity / P. Perzyna, A. Sawezuk // Nucl. Eng. Des. – 1973. – Vol. 24. – № 1. – P. 1-55.



Валиахметов О. Р., Галеев Р. М., Мулюков Р. Р.
O. R. Valiakhmetov, R. M. Galeev, R. R. Mulyukov

**МЕХАНИЧЕСКИЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛУФАБРИКАТОВ
ИЗ ТИТАНОВЫХ СПЛАВОВ, ПОДВЕРГНУТЫХ ВСЕСТОРОННЕЙ
ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ КОВКЕ**

**MECHANICAL AND TECHNOLOGICAL PROPERTIES OF SEMI-FINISHED PRODUCTS
OUT OF TITANIUM ALLOYS SUBJECTED TO MULTIPLE ISOTHERMAL FORGING**

Мулюков Радик Рафикович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук (Россия, Уфа). E-mail: imsp@imsp.ru.

Mr. Radik R. Mulyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Director Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS (Russia, Ufa). E-mail: imsp@imsp.ru.

Галеев Рафаил Мансурович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией «Материаловедение мелкозернистых металлов и сплавов» Института проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук (Россия, Уфа). E-mail: galeev@imsp.ru.

Mr. Rafail M. Galeev – PhD in Engineering, Head of the Laboratory «Material science of fine-grained metals and alloys», Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS (Russia, Ufa). E-mail: galeev@imsp.ru.

Валиахметов Олег Рязович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук (Россия, Уфа). E-mail: olegv@imsp.ru.

Mr. Oleg R. Valiakhmetov – PhD in Engineering, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS (Russia, Ufa). E-mail: olegv@imsp.ru.

Аннотация. Рассмотрен основной подход к формированию однородной глобулярной ультрамелкозернистой структуры в крупногабаритных полуфабрикатах из титановых сплавов. Представлены результаты прикладных исследований, выполненных в Институте проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук (ИПСМ РАН), по получению объёмных и листовых титановых полуфабрикатов с однородной ультрамелкозернистой структурой посредством деформационной обработки методом всесторонней изотермическойковки. Показано, что титановые сплавы с ультрамелкозернистой структурой могут проявлять эффект сверхпластической деформации при значениях температур на 200...350 °С ниже температурного интервала сверхпластичности для мелкозернистых титановых сплавов, обработанных по традиционным технологиям. При комнатной температуре ультрамелкозернистые титановые сплавы имеют повышенные прочностные и усталостные свойства.

Summary. The main approach to the formation of a homogeneous globular ultrafine-grained structure in large-sized semi-finished products out of titanium alloys is considered. The results of applied research performed in IMSP, for obtaining bulk and sheet titanium semi-finished products with homogeneous ultrafine-grained structure by means of multiple isothermal forging are presented. It is shown that ultrafine-grained titanium alloys can display an effect of superplastic deformation at temperatures below than that of fine-grained titanium ones processed by conventional technologies by 200...350 °C. At room temperature, ultrafine-grained titanium alloys have increased strength and fatigue properties.

Ключевые слова: титановый сплав, ультрамелкозернистая структура, всесторонняя изотермическаяковка, сверхпластичность, механические свойства.

Key words: titanium alloy, ultrafine-grained structure, comprehensive isothermal forging, superplasticity, mechanical properties.

УДК 669. 295: 621.785

Работа выполнена в рамках государственного задания Института проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук. Экспериментальные исследования выполнены на базе Центра коллективного пользования научным оборудованием Института проблем сверхпластичности металлов РАН.

Титановые сплавы относятся к труднодеформируемым и дорогостоящим материалам, что стимулирует использование ресурсосберегающих технологий изготовления изделий, снижающих деформирующие усилия и повышающих коэффициент использования металла. К таковым относятся, например, объёмную штамповку при температурно-скоростных условиях сверхпластической деформации, сверхпластическую формовку (СПФ) листовых заготовок и совмещённую с диффузионной сваркой сверхпластическую формовку (СПФ/ДС) для изготовления пустотелых сложно-профильных панелей. Однако существенным недостатком указанных технологий для титановых сплавов являются высокие температуры (850...950 °С) реализации эффекта сверхпластичности в материале с обычной глобулярной мелкозернистой структурой (размер зёрен 5...15 мкм). Высокие температуры нагрева приводят к интенсивному окислению поверхности титанового материала и требуют изготовления технологической оснастки из дорогостоящих жаропрочных сплавов.

Между тем создание в титановых сплавах глобулярной ультрамелкозернистой (УМЗ) структуры (размер зёрен ≤ 1 мкм) позволяет существенно, на 200...350 °С, понизить температурный интервал проявления сверхпластичности [1; 2]. Деформация титановых сплавов в условиях низкотемпературной сверхпластичности улучшает экономичность технологических процессов за счёт уменьшения толщины газонасыщенного слоя материала, удешевления и повышения стойкости штампового инструмента, снижения затрат энергии и материалов. Кроме того, титановые сплавы с УМЗ-структурой обладают улучшенными прочностными и усталостными свойствами [1 – 3].

В Институте проблем сверхпластичности металлов разработаны способы получения объёмных и листовых полуфабрикатов с однородной УМЗ-структурой из титановых сплавов [4; 5]. Перспективным способом деформационной обработки для получения глобулярной структуры, однородной по всему объёму крупногабаритной титановой заготовки, является так называемая «всесторонняя изотермическая ковка» (ВИК) [1; 2]. Следует отметить, что обработка титановых полуфабрикатов по схеме всестороннейковки – это достаточно давно известный и широко используемый технологический процесс проработки их структуры [6]. Такой процесс деформационной обработки объёмных заготовок действительно относится к разряду ковочных, поскольку выполняется в интервале повышенных скоростей деформации ($10^1 \dots 10^2 \text{ с}^{-1}$) и является неизотермическим.

В разработанном ИПСМ РАН методе ВИК [2; 4] также применяются операции свободнойковки (осадка, вытяжка) на плоских бойках с многократной сменой направления деформирования заготовки. Однако как заготовка, так и бойки нагреты до температуры деформации и поэтому, очевидно, обработка заготовки является близким к изотермическому условию процессом деформации. Причём операции осадки и вытяжки осуществляются при пониженных скоростях деформации ($10^{-3} \dots 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) и, таким образом, термин «ковка» в данном случае является условным. Указанные специфические условия проведения обработки металла методом ВИК необходимы для реализации в материале структурных процессов динамической рекристаллизации, сверхпластичности и других термоактивированных процессов с целью получения в объёмной заготовке однородной и измельчённой микроструктуры с равноосными зёрнами.

Рассмотрим сущность деформационного метода ВИК. На рис. 1 схематично показан единственный цикл деформационной обработки, представляющий собой совокупность последовательных операций осадки заготовки в трёх ортогональных направлениях с последующей вытяжкой для придания заготовке приблизительно исходной формы и размеров. Причём в конце цикла деформирования возникает новое положение оси заготовки.

Выполнение последовательности данных операций обеспечивает цикличность деформационной обработки заготовки, благодаря чему описанный цикл ВИК можно снова воспроизводить, добиваясь полной проработки застойных зон и набирая необходимую степень деформации во всём объёме заготовки.



Рис. 1. Схема цикла всесторонней изотермическойковки

Таким образом, многократное повторение циклов ВИК при определённой температуре этапа обеспечивает наиболее однородное протекание динамической рекристаллизации и равномерную проработку структуры материала практически во всём объёме заготовки.

Метод ВИК обладает технологической привлекательностью, поскольку деформационную обработку методом ВИК выполняют на промышленном гидравлическом прессе, оснащённом штамповым блоком с нагреваемыми до температуры деформации плоскими бойками для обеспечения изотермического режима деформации.

Измельчение микроструктуры материала до ультрамелкозернистого состояния вплоть до наноразмерного уровня основано на поэтапном снижении температуры ВИК, при этом решающую роль имеет деформируемость материала при температуре обработки. В связи с этим ВИК проводится с последовательным снижением температуры деформации от одного этапаковки к другому. Выполнение циклов ВИК при более низкой температуре этапа способствует дальнейшему измельчению микроструктуры заготовки, что, приводя к повышению технологической пластичности материала, позволяет снова снизить температуру следующего этапа ВИК. Таким образом, ВИК с поэтапным снижением температуры даёт возможность измельчить зёрненную структуру материала вплоть до наноразмерного диапазона, избегая при этом его разрушения. Температура заключительного этапа ВИК выбирается исходя из требуемого размера зёрен в микроструктуре материала. Следует отметить, что в процессековки по мере измельчения микроструктуры материал переходит в состояние сверхпластического течения, что дополнительно способствует однородности формирующейся микроструктуры [1].

Рассмотрим на примере титанового сплава ВТ6 (Ti–6Al–4V) получение объёмных и листовых крупногабаритных полуфабрикатов с УМЗ-структурой. Для работы использовали пруткок сплава ВТ6 диаметром 230 мм с температурой полного полиморфного $\alpha \Rightarrow \beta$ превращения 990 °С. Перед деформационной обработкой мерные заготовки $\varnothing 230 \times 240$ (мм) подвергали нагреву в температурном интервале β -области (1010 ± 10 °С) и последующему охлаждению в воде для получения в материале тонкопластинчатой ($\alpha + \beta$)-структуры, которая является наиболее благоприятной исходной структурой в двухфазных титановых сплавах с точки зрения однородного развития при горячей деформации рекристаллизационных процессов, ведущих к трансформации пластинчатой структуры в глобулярную структуру и её измельчению [3]. Дальнейшая обработка заготовок состояла из многоэтапной всесторонней изотермическойковки на индукционно нагреваемых плоских бойках, начиная с температурного этапа при значении температуры, равном 700 °С, и заканчивая при значении температуры этапа, равном 600 °С, со средней скоростью деформации $5 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Суммарная степень истинной деформации на каждом этапе составляла 2...2,5. Исходя из силовых параметров процессаковки при значении температуры обработки, равном 600 °С, предельный объём заготовки из сплава ВТ6, которую можно было деформировать на имеющемся в ИПСМ РАН гид-

равлическом прессе усилием 16 МН, соответствовал кованой заготовке диаметром 200 мм и длиной 300 мм, внешний вид которой представлен на рис. 2, а.

Полученная заготовка имела однородную глобулярную структуру с размером зёрен, равным 400...500 нм. На рис. 2 также показаны другие наноструктурированные объёмные титановые полуфабрикаты, полученные путём всесторонней изотермическойковки.

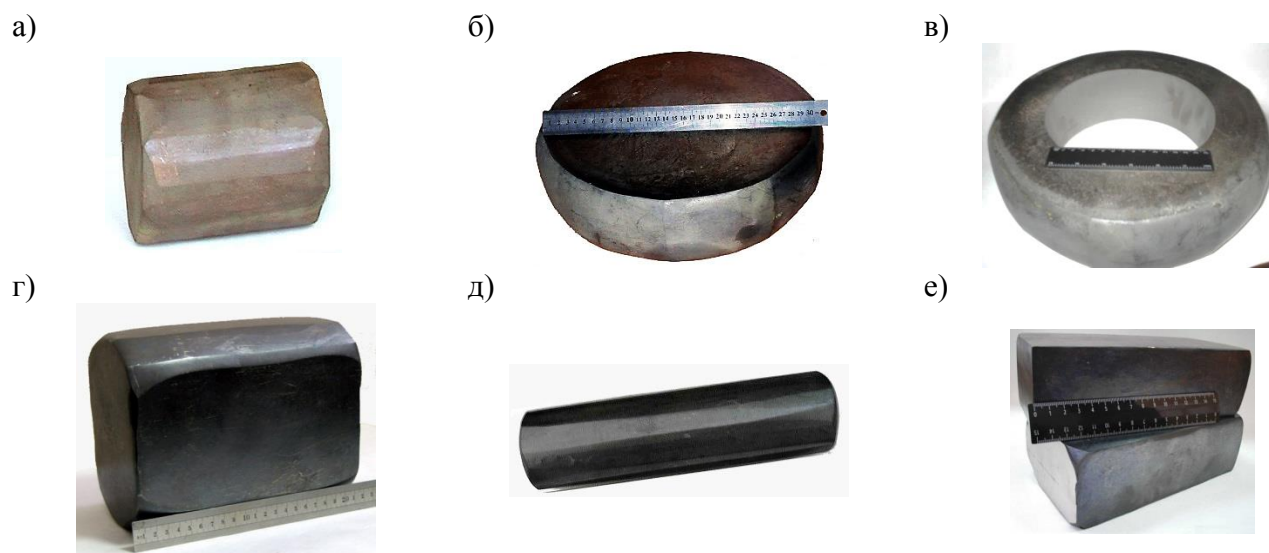


Рис 2. Полуфабрикаты с ультрамелкозернистой структурой из титанового сплава ВТ6 (а, б, в, г) и технического титана ВТ1-0 (д, е): а – биллет $\varnothing 200 \times 300$ (мм); б – диск $\varnothing 320 \times 100$ (мм); в – кольцо $\varnothing_{\text{внеш}} 320$ мм, $\varnothing_{\text{внутр}} 200$ мм, Н 80 мм; г – плита $200 \times 170 \times 100$ мм; д – биллет $\varnothing 80 \times 350$ (мм); е – плиты $160 \times 100 \times 60$ мм

Механические испытания образцов, вырезанных из кованой наноструктурной заготовки (см. рис. 2, а) в радиальном и тангенциальном направлениях, показали близкие прочностные и пластические характеристики (см. табл. 1), что свидетельствует об изотропности механических свойств кованого материала. Следует отметить, что в наноструктурном состоянии титановый материал имеет повышенные прочностные и усталостные свойства. Так, в обычном мелкозернистом состоянии сплав ВТ6 даже после термического упрочнения закалкой и старением демонстрирует почти при том же уровне пластичности заметно меньшую (на ~30 %) прочность (см. табл. 1).

Таблица 1
 Механические свойства (20 °С) наноструктурной заготовки из сплава ВТ6

Материал		σ_B , МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ , %	ψ , %	σ_{-1} , МПа
Послековки (d=400 нм)	Радиальное направление	1360	1350	7	62	500
	Тангенциальное направление	1355	1335	7	61	500
Послезаковки и старения (d=10 мкм)		1050	980	9	35	380

Более высокая прочность наноструктурного сплава ВТ6 сохраняется в интервале эксплуатационных для этого материала температур, то есть до ~350 °С [7]. Дальнейшее повышение температуры приводит к резкому снижению прочности, повышению пластических характеристик и проявлению эффекта сверхпластичности при температурах выше ~550 °С, что на 300...350 °С ниже температурного интервала сверхпластичности обычного мелкозернистого материала.

Характеристики низкотемпературной сверхпластичности технического титана и некоторых его сплавов с УМЗ-структурой представлены в табл. 2.

Таблица 2

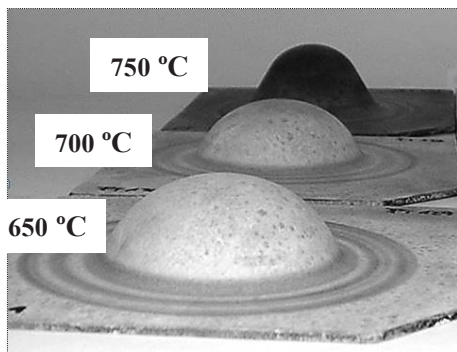
Характеристики сверхпластичности титана и его сплавов

Материал	d, мкм	t, °C	$\dot{\epsilon}$, с ⁻¹	σ , МПа	δ , %	m
Технический титан BT1-0	0,1	450	1×10^{-4}	105	115	0,3
	10	600	3×10^{-4}	120	140	0,26
Сплав BT8 (Ti-6,7Al-4,7Mo)	0,1	575	2×10^{-4}	165	1200	0,45
	5	800	5×10^{-4}	80	650	0,4
Сплав BT6 (Ti-6Al-4V)	0,3	650	7×10^{-4}	70	800	0,44
	5	800	5×10^{-4}	40	600	0,4
Сплав BT30 (Ti-11Mo-5,5Sn-4Zr)	0,3	550	5×10^{-4}	130	390	0,46
	5	725	3×10^{-4}	0,3	180	0,3

Наноструктурные объёмные заготовки из титанового сплава, изготовленные всесторонней изотермической ковкой, могут служить исходным материалом для получения листовых полуфабрикатов с высокой однородностью структуры [5]. При этом тёплую прокатку осуществляют в регламентированном интервале температур, в котором обеспечивается необходимая технологическая пластичность и сохраняется УМЗ-структура материала.

Так, путём прокатки кованных заготовок из сплава BT6 в интервале значений температур, равном 550...650 °C, были изготовлены листы промышленного размера (1500 мм длиной, 500 мм шириной и 2 мм толщиной) [8]. При таких условиях прокатки в листовом материале сохраняется нанометрический размер и равноосная форма зёрен, а также формируется базисная текстура, определяющая малую величину плоскостной анизотропии его механических характеристик. Наноструктурный лист из сплава BT6 в интервале значений температур, равном 700...750 °C, и скоростей деформации $10^{-4} \dots 10^{-3}$ с⁻¹ имеет приемлемые для технологии СПФ напряжения течения величиной 15...30 МПа, которые являются типичными для обычного промышленного мелкозернистого листа сплава BT6 (размер зёрен 4...7 мкм) при более высоких значениях температур деформации, равных 900...920 °C. В отличие от промышленного листа наноструктурный листовый материал равномерно сверхпластически формируется при значениях температур, равных 650...750 °C (см. рис. 3, а, б), а также диффузионно сваривается и образует качественное твердофазное соединение при значениях температур, равных 750...800 °C, что позволяет значительно снизить температуру технологических процессов СПФ и СПФ/ДС [9].

а)



б)

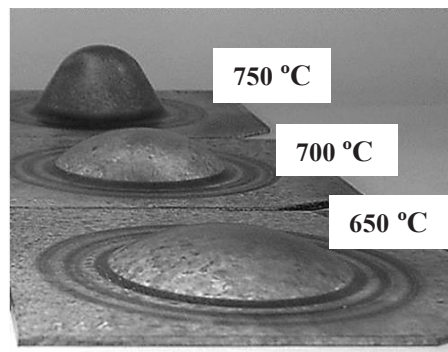


Рис. 3. Листовые образцы из сплава BT6 после формовки в конусную матрицу при температурах 650, 700 и 750 °C: а – наноструктурный лист; б – промышленный лист

Таким образом, результаты прикладных исследований, выполненных в ИПСМ РАН, показывают возможность получения объёмных и листовых титановых полуфабрикатов с однородной УМЗ-структурой посредством деформационной обработки методом всесторонней изотермическойковки. Титановые полуфабрикаты с УМЗ-структурой способны к сверхпластической деформации при температурах на 200...350 °С ниже температурного интервала проявления эффекта сверхпластичности для мелкозернистого титанового материала, обработанного по традиционным технологиям. При комнатной температуре титановые сплавы в наноструктурном состоянии имеют повышенные прочностные и усталостные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сверхпластичность ультрамелкозернистых сплавов: эксперимент, теория, технологии / Р. Р. Мулюков, Р. М. Имаев, А. А. Назаров [и др.]; под ред. Р. Р. Мулюкова. - М.: Наука, 2014. - 284 с.
2. Мулюков, Р. Р. Развитие принципов получения и исследование объёмных наноструктурных материалов в ИПСМ РАН / Р. Р. Мулюков // Российские нанотехнологии. - 2007. - Т. 2(7-8). - С. 38-53.
3. Салищев, Г. А. Формирование субмикроструктурной структуры в титане и титановых сплавах и их механические свойства / Г. А. Салищев, Р. М. Галеев, С. П. Малышева [и др.] // Металловедение и техническая обработка металлов. - 2006. - № 2. - С. 19-26.
4. Пат. 2134308 Российская Федерация, МПК⁷ С22F 1/18. Способ обработки титановых сплавов / О. А. Кайбышев, Г. А. Салищев, Р. М. Галеев, Р. Я. Лутфуллин, О. Р. Валиахметов; заявитель и патентообладатель ИПСМ РАН. - № 96120958/02; заявл. 18.10.1996; опубл. 10.08.1999. Бюл. № 22. - 2 с.
5. Пат. 2224047 Российская Федерация, МПК⁷ В21В3/00. Способ изготовления листовых полуфабрикатов из титановых сплавов / О. Р. Валиахметов, Р. М. Галеев, О. А. Кайбышев, Г. А. Салищев; заявитель и патентообладатель ИПСМ РАН. - № 2002114893/02; заявл. 05.06.2002; опубл. 20.02.2004. Бюл. № 5. - 2 с.
6. Полуфабрикаты из титановых сплавов / В. К. Александров, Н. Ф. Аношкин, Г. А. Бочвар [и др.]; под ред. Н. Ф. Аношкина. - М.: Металлургия, 1979. - 512 с.
7. Салищев, Г. А. Механические свойства титанового сплава ВТ6 с микрокристаллической и субмикроструктурной структурами / Г. А. Салищев, Р. М. Галеев, С. В. Жеребцов [и др.] // Металлы. - 1999. - № 6. - С. 84-87.
8. Галеев, Р. М. Субмикроструктурный лист из титанового сплава ВТ6 для низкотемпературной сверхпластической формовки / Р. М. Галеев // Металлы. - 2005. - № 6. - С.19-24.
9. Kaibyshev, O. A. Advanced superplastic forming and diffusion bonding of titanium alloy / O. A. Kaibyshev, R. V. Safiullin, R. Ya. Lutfullin, O. R. Valiakhmetov, R. M. Galeev, A. Dutta, T. Raghu, G. G. Saha // Materials Science and Technology. - 2006. - Vol. 22(3). - P. 343-348.



Денисевич Д. С., Багмутов В. П., Захаров И. Н.
D. S. Denisevich, V. P. Bagmutov, I. N. Zakharov

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТИТАНОВОМ СПЛАВЕ
ТИПА Ti6Al2V ПРИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОМ УПРОЧНЕНИИ**

**SIMULATION OF RESIDUAL VOLTAGES IN TITANIUM Ti6Al2V ALLOY
AT ELECTROMECHANICAL LAMINATION**

Денисевич Денис Сергеевич – ассистент кафедры сопротивления материалов Волгоградского государственного технического университета (Россия, Волгоград); 400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28; тел.: + 7 (8442) 23-00-76. E-mail: sopromat@vstu.ru.

Mr. Denis S. Denisevich – Assistant, Resistance of materials department, Volgograd State Technical University (Russia, Volgograd); 400005, Volgograd, 28 Lenin str.; tel.: + 7 (8442) 23-00-76. E-mail: sopromat@vstu.ru.

Багмутов Вячеслав Петрович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Волгоградского государственного технического университета (Россия, Волгоград); 400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28; тел.: + 7 (8442) 23-00-76. E-mail: sopromat@vstu.ru.

Mr. Vyacheslav P. Bagmutov – Doctor of Engineering, Professor, Head of Resistance of materials department, Volgograd State Technical University (Russia, Volgograd); 400005, Volgograd, 28 Lenin str.; tel.: + 7 (8442) 23-00-76. E-mail: sopromat@vstu.ru.

Захаров Игорь Николаевич – доктор технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов Волгоградского государственного технического университета (Россия, Волгоград); 400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28; тел.: + 7 (8442) 23-00-76. E-mail: zakharov@vstu.ru.

Mr. Igor N. Zakharov – Doctor of Engineering, Associate professor, Resistance of materials department, Volgograd State Technical University (Russia, Volgograd); 400005, Volgograd, 28 Lenin str.; tel.: + 7 (8442) 23-00-76. E-mail: zakharov@vstu.ru.

Аннотация. В данной работе представлено численное решение задачи связанной механики по прогнозированию остаточных напряжений, возникающих при импульсном термосиловом упрочнении титановых сплавов. Моделирование фазовых превращений при этом осуществлялось на основе совместного анализа динамики температурных полей и диаграммы непрерывного охлаждения для исследуемого сплава. Построение определяющих соотношений выполнено на основе аддитивного разложения тензора скоростей деформации в рамках изотропно-трансляционной нелинейной модели упрочнения. Представлены результаты моделирования остаточных напряжений для титанового сплава типа Ti6Al2V. В частности, установлено дискретное распределение остаточных напряжений, повторяющих тепловые импульсы переменного источника тепла.

Summary. In this paper, we present a numerical solution of the problem of coupled mechanics for the prediction of residual stresses that occur when pulsed thermosilic hardening of titanium alloys. Simulation of phase transformations was carried out based on a joint analysis of the dynamics of temperature fields and a continuous cooling diagram for the alloy under study. The construction of the defining relations is based on the additive decomposition of the strain rate tensor in the framework of the isotropic-translational nonlinear hardening model. The results of modeling the residual stresses for a titanium alloy of the Ti6Al2V type are presented, in particular, a discrete distribution of residual stresses is obtained that repeat the heat pulses of the alternating heat source.

Ключевые слова: остаточные напряжения, импульсное термосиловое упрочнение, фазовые превращения, температурное поле, титановый сплав, нелинейная модель упрочнения, хрупкое разрушение, поверхностный слой, электромеханическая обработка.

Key words: residual stresses, pulsed thermo-hardening, phase transformations, temperature field, titanium alloy, nonlinear hardening model, brittle fracture, surface layer, electromechanical treatment.

УДК 639.3

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 17-08-01742.

Введение

Электромеханическая обработка (ЭМО), сочетающая в себе интенсивное термическое и силовое воздействия на поверхностный слой, является достаточно эффективным способом повышения износостойкости стальных и титановых сплавов [1]. В то же время интенсивное тепловое воздействие приводит к формированию растягивающих остаточных напряжений в направлении обработки, которые провоцируют хрупкое разрушение, коррозионное растрескивание и в целом оказывают негативное влияние на усталостную долговечность готового изделия. Особенно остро данная проблема возникает применительно к поверхностной обработке титановых сплавов [2; 3]. Особенно остро данная проблема возникает применительно к поверхностной обработке титановых сплавов [3; 4], для которых степень упрочнения поверхностного слоя оказывается недостаточной для компенсации отрицательного вклада остаточных напряжений. Оптимизацию технологических режимов (скорость обработки, величина прижимного усилия на инструменте и др.) или разработку новых технологических операций необходимо осуществить таким образом, чтобы сохранить достаточно высокую твёрдость поверхностного слоя материала после обработки и по возможности уменьшить величину растягивающих остаточных напряжений.

Структура и свойства поверхностного слоя при ЭМО формируются в условиях высоких скоростей нагрева и охлаждения ($10^5 \dots 10^6$ °C/с), а также горячего пластического деформирования с большим контактным давлением (до 1000 МПа). В связи с этим изучить условия её образования, а также спрогнозировать распределение образующейся дискретной структуры и остаточных напряжений, принимая во внимание импульсный характер воздействия на материал, достаточно трудно.

Использование для раскрытия функциональной связи «технологическое воздействие – структура – свойства» только экспериментальных способов исследования оказывается недостаточным. В результате возникает новый класс актуальных прикладных задач, которые требуют привлечения современных методов математического моделирования в рамках комплексной междисциплинарной проблемы, включающей механику деформируемого твёрдого тела, материаловедение, термодинамику, физику твёрдого тела и др.

В рамках данной статьи на основе метода конечных элементов (МКЭ) излагается методика решения связанной технологической задачи о поверхностном упрочнении электромеханической обработкой титанового сплава типа Ti6Al2V. Проводится анализ распределения остаточных напряжений, возникающих после упрочнения.

Постановка задачи

В данной статье мы рассматривали построение модели электромеханической обработки на основе совместного решения нескольких уравнений в трёхмерной постановке:

- уравнения равновесия;
- уравнения теплопроводности;
- феноменологического уравнения кинетики мартенситного фазового перехода.

Основные уравнения и граничные условия

Решение задачи основывается на системе связанных дифференциальных уравнений производных от закона сохранения импульса и энергии, содержащих в явном виде связанные члены:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \\ -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q_{\text{фаз}} + Q_{\text{мех}} &= c\rho\dot{T}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ∇ – оператор набла в актуальной конфигурации деформируемого тела; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши; \mathbf{f} – вектор объёмных сил; \mathbf{q} – вектор потока тепла; T – температура; $Q_{\text{фаз}}$ – скрытая теплота фазовых превращений; $Q_{\text{мех}}$ – теплота, соответствующая диссипации механической энергии при пластическом деформировании.

Основные уравнения дополняются начальными и граничными условиями применительно к импульсной (переменным током) ЭМО детали твердосплавным инструментом в форме ролика (см. рис. 1) (1 – 4).

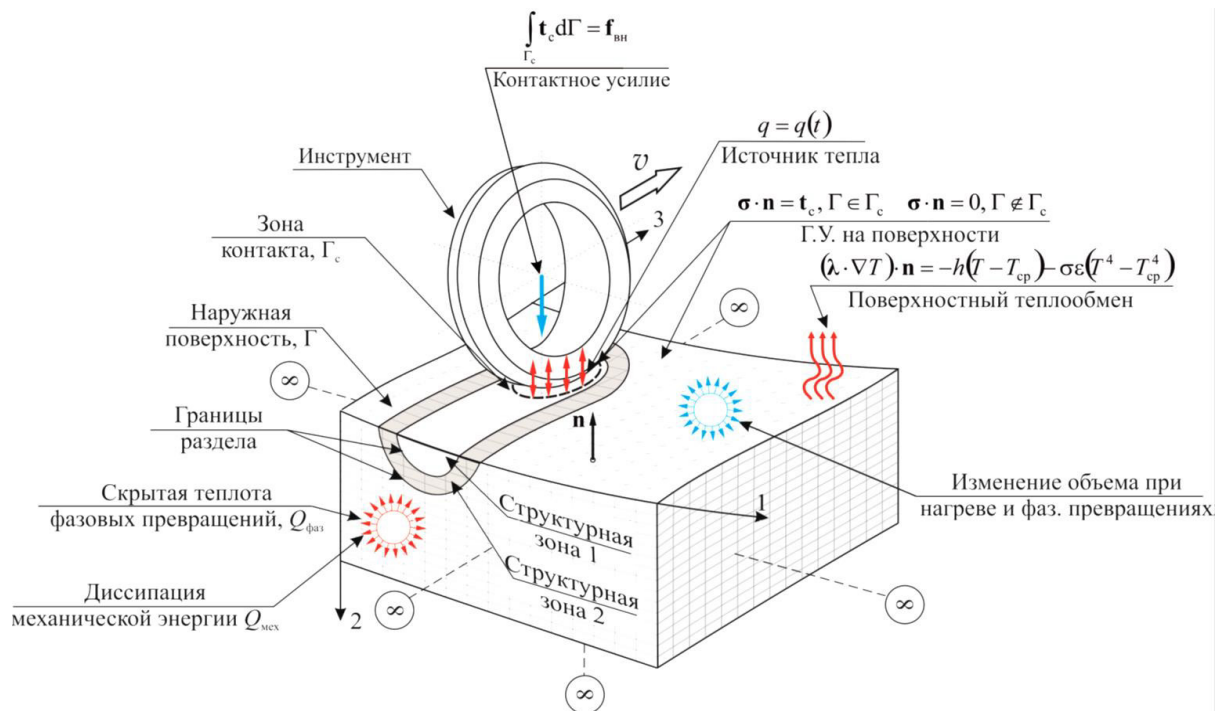


Рис.1. Электромеханическая обработка детали твердосплавного инструмента в форме ролика

Контактный инструмент моделируется эллипсоидным штампом, который можно принять его абсолютно жёстким (материал ролика значительно твёрже материала обрабатываемой детали). Силовые граничные условия задают равенство нулю на свободной поверхности соответствующих нормальных и касательных напряжений, которые дополняются краевыми условиями Герца – Сильяори.

Кроме того, на границе структурных областей задаются условия совместности перемещений и поперечных (к поверхности раздела с нормалью в данной точке) нормальных и касательных напряжений, на бесконечности – равенство перемещений и напряжений нулю.

Принимается гипотеза о естественном, ненагруженном состоянии тела в начальный момент времени – напряжения и деформации отсутствуют:

$$\begin{aligned}
 \sigma \cdot n &= 0, & \Gamma \notin \Gamma_c, \\
 \sigma \cdot n &= t_c, \int_{\Gamma_c} t_c d\Gamma = f_{вн}, & \Gamma \in \Gamma_c, \\
 g_n &\geq 0, \sigma_n \geq 0, g_n \sigma_n = 0, \\
 u_i^0 &= 0, \varepsilon_{ij}^0 = 0, \sigma_{ij}^0 = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где n – единичный вектор нормали к поверхности деформируемого тела в текущей конфигурации; t_c – интенсивность нагрузки в контактной зоне; $f_{вн}$ – вектор внешней нагрузки, действующей на ролик; g_n – функция расстояния; σ_n – контактное давление; u_i – компоненты вектора перемещений; ε_{ij} – компоненты тензора деформации; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

Расчётная область вследствие малой кривизны поверхности и локальности воздействия задаётся в виде полупространства с подобластями (зонами), различающимися физико-

механическими характеристиками. Границы данных зон соответствуют областям металла с разной структурой, формирующейся в ходе термосилового нагружения (например, фрагментам со структурой закалки, отпуска и исходного состояния – зоны 1, 2 на рис. 1). Их текущее положение устанавливается на каждом расчётном шаге из решения рассматриваемой связанной задачи.

С учётом принятого ранее допущения в зоне контакта эллипсоидного штампа и детали задаётся эквивалентный равномерно-распределённый поверхностный источник тепла q . Температура в начальный момент времени T^0 и на бесконечности T^∞ равна температуре окружающей среды $T_{\text{ср}}$, краевые условия на поверхности для второго уравнения системы (1) заданы системой (3):

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= h(T - T_{\text{ср}}) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_{\text{ср}}^4), \quad \Gamma \notin \Gamma_c, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= -q_{\text{дж}}, \quad \Gamma \in \Gamma_c, \\ T^0 &= T_{\text{ср}} \quad T^\infty = T_{\text{ср}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где h – коэффициент конвективного теплообмена; σ – постоянная Стефана – Больцмана; ε – коэффициент теплового излучения.

В случае ЭМО переменным током удельная мощность источника $q_{\text{дж}}$ определяется согласно закону Джоуля – Ленца:

$$q_{\text{дж}} = 2kUI \sin^2(2\pi vt), \quad (4)$$

где $k = \frac{\lambda_{\text{дет}}}{\lambda_{\text{инст}} + \lambda_{\text{дет}}}$ – коэффициент, учитывающий перераспределения тепла между инструментом и деталью; $\lambda_{\text{инст}}$, $\lambda_{\text{дет}}$ – коэффициенты теплопроводности материалов инструмента и обрабатываемой детали соответственно; U – действующее значение контактного напряжения; I – действующее значение силы тока; ν – частота тока.

Специфика задачи также требует анализа диаграмм состояния структур металлического сплава, подвергнутого ЭМО, для определения физико-механических характеристик фаз в данной точке в текущий момент времени.

Моделирование фазовых превращений

Математическая модель фазовых переходов, инициируемых тепловым воздействием при ЭМО, для титановых псевдо- α -сплавов представляет собой моделирование $\alpha \rightarrow \beta$ и $\beta \rightarrow \alpha'$ (α'') превращений на основе анализа термокинетической диаграммы превращения переохлаждённой β -фазы.

На рис. 2 и 3 α , α' , α'' – стабильные и метастабильные фазы, образующиеся при распаде β -фазы в процессе непрерывного охлаждения. В текущий момент времени в рассматриваемой точке температура начала и конца мартенситного превращения, а также фазовый состав сплава определяются по термокинетической диаграмме в зависимости от скорости охлаждения (см. рис. 2).

В связи с высокой скоростью роста мартенсита в процессе трансформации (близкой к скорости звука) принято считать, что превращение происходит мгновенно. В этом случае кинетика образующейся мартенситной фазы в зависимости от температуры может быть описана эмпирическим законом Койстинена – Марбургера [5]:

$$\zeta = \zeta_\beta (1 - \exp(-b(M_s - T))), \quad (5)$$

где ζ – объёмная доля мартенситной фазы; ζ_β – объёмная доля β -фазы, образовавшейся на стадии нагрева; b – эмпирический коэффициент (для Ti6Al2V $b = -0,05$); M_s – температура начала мартенситного превращения.

На рис. 3 показан пример термического цикла при электромеханической обработке Ti6Al2V.

При исследовании высокоскоростных процессов термической обработки необходимо учитывать зависимость величины критических температур $T_{кр}$ (температур фазовых превращений) от скорости нагрева. Для титановых сплавов с ростом скорости нагрева характерно смещение критических точек $\Delta T_{кр}$ при $\alpha \rightarrow \beta$ превращении за счёт подавления роста β -фазы, фазовый переход при этом осуществляется только путём образования новых зародышей в области более высоких значений температур. Максимальное смещение при скорости нагрева порядка $10^5 \dots 10^7$ °C/c составляет 90 °C [6].

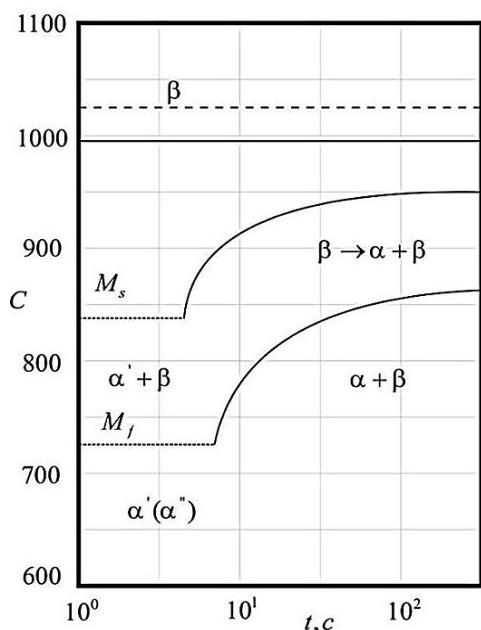


Рис. 2. Термокинетическая диаграмма

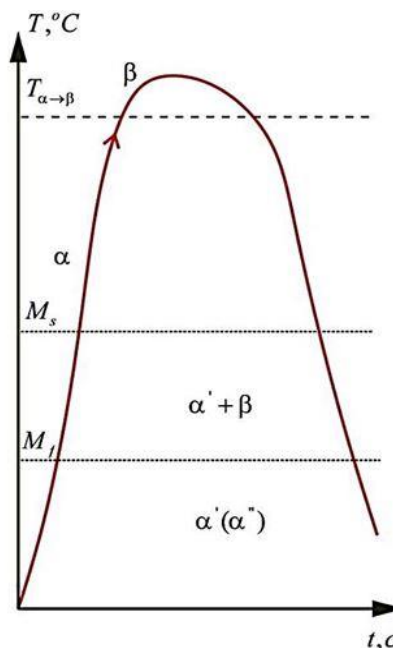


Рис. 3. Пример термического цикла при электромеханической обработке Ti6Al2V

Определяющие соотношения

Решение уравнения теплопроводности осуществлялось на основе МКЭ в слабой форме Галеркина, для интегрирования по времени использовалась полностью неявная схема. Для решения полученной нелинейной задачи применялся итерационный метод Пикара совместно с формулой релаксации [7].

Задача механики решалась на основе вариационной постановки в актуальной конфигурации деформируемого тела с дополнительным контактным членом, полученным согласно методу штрафов для одностороннего контакта.

Определяющие соотношения строились на основе аддитивного разложения тензора скоростей деформации на упругую, пластическую и дилатационную части:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^d, \quad (7)$$

где $\mathbf{D}^d = \left(\alpha_T \dot{T} + \frac{1}{3} \delta_\phi \dot{\zeta} \right) \mathbf{1}$ – дилатационная часть тензора скоростей деформации; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; δ_ϕ – относительное изменение объёма при фазовом переходе; $\dot{\zeta}$ – скорость образования новой фазы ($\zeta = \zeta(T)$); $\mathbf{1} = \delta^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ – единичный тензор второго ранга; $\delta^{ij} = \delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Связь между напряжениями и деформацией в итоге выражается в скоростной форме (с заменой материальных производных на объективные), то есть

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4C : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^d) + {}^4C^{\text{rot}} : \mathbf{W}, \quad (8)$$

где $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ – материальная производная тензора напряжений Коши; ${}^4C^{\text{rot}} = 1/2(\sigma^{il}\delta^{jk} + \sigma^{jl}\delta^{ik} - \sigma^{ik}\delta^{jl} - \sigma^{jk}\delta^{il})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ – тензор четвёртого ранга, воспроизводящий эффект поворота тензора напряжений Коши (${}^4C^{\text{rot}} : \mathbf{W} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}$); ${}^4C = (\lambda + (2/3)\mu)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}}$ – тензор упругости четвёртого ранга для изотропной среды; λ, μ – константы Ляме; ${}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} = {}^4\mathbf{1} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ – единичный тензор-девиатор четвёртого ранга; единичный тензор четвёртого ранга – ${}^4\mathbf{1} = 1/2[\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$.

Эволюционные соотношения для тензора скоростей деформации с учётом принятой изотропно-трансляционной модели упрочнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^p &= \dot{\gamma} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \\ \boldsymbol{\alpha}^J &= {}^4H_{\alpha} : \mathbf{D}^p = H_{\alpha} \mathbf{D}^p, \\ \dot{\epsilon}^p &= \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\dot{\gamma}$ – пластический множитель (множитель Лагранжа), связанный со скоростью пластической деформации; $\mathbf{s} = {}^4\mathbf{1}_{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}$ – девиаторная часть тензора напряжений Коши; \mathbf{N} – ортогональный по поверхности текучести единичный тензор-девиатор; $\boldsymbol{\alpha}^J$ – производная Яуманна от тензора микронапряжений.

Отметим, что кинематическое упрочнение при этом соответствует обобщённой модели Прагера – Ишлинского.

Интегрирование соотношений (8), (9) по времени осуществлялось на основе неявной схемы согласно алгоритму, предложенному в работе [7]. Для решения нелинейного вариационного уравнения использовался метод Ньютона.

Результаты расчёта

На рис. 4 представлен термический цикл точек, расположенных на пересечении плоскостей $x_1 0x_2$ и $x_3 0x_2$ на глубинах 0; 0,25; 0,5; 0,75 мм (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно).

Температурное воздействие на материал носит достаточно сложный характер, различные точки материала могут несколько раз проходить стадию закалки и упрочнения (см. рис. 4, кривая 1).

При этом максимальная температура достигает практически температуры плавления, однако носит локальный характер и быстро затухает. Глубина упрочнённой зоны, соответствующей закалке, составляет порядка 200 мкм. Скорость охлаждения при этом составляет $\dot{T} = (1,2 - 1,5) \cdot 10^5$ °C/с. На основе разработанной модели осуществлён расчёт остаточных напряжений, возникающих после электрохимической обработки.

Как видно на рис. 5, распределение остаточных напряжений соответствует фрагментации микроструктуры. Максимальное растягивающее окружное напряжение в квазистационарной области составляет 395 МПа, в то же время максимальное сжимающее напряжение находится в осевом направлении и составляет 295 МПа на расстоянии 0,5 мм от оси направления обработки.

Таким образом, показано, что электрохимическая обработка поверхности титановых сплавов приводит к формированию в поверхностном слое дискретно структурированных областей остаточных напряжений с периодичностью, аналогичной распределению зон упрочнения.

Напряжённое состояние при этом делится на чередующиеся в пространстве зоны с наибольшими по модулю сжимающими и растягивающими напряжениями.

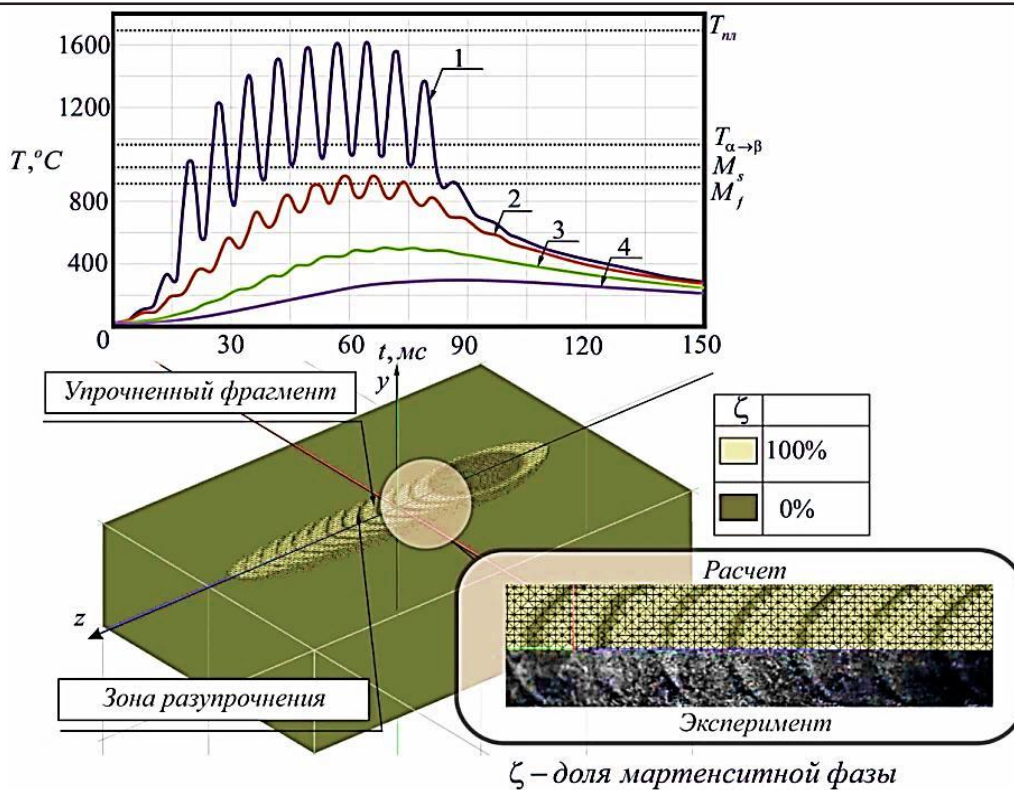


Рис. 4. Термический цикл и картина микроструктуры на поверхности сплава типа Ti6Al2V при обработке со скоростью $v = 1,23 \text{ м/мин}$

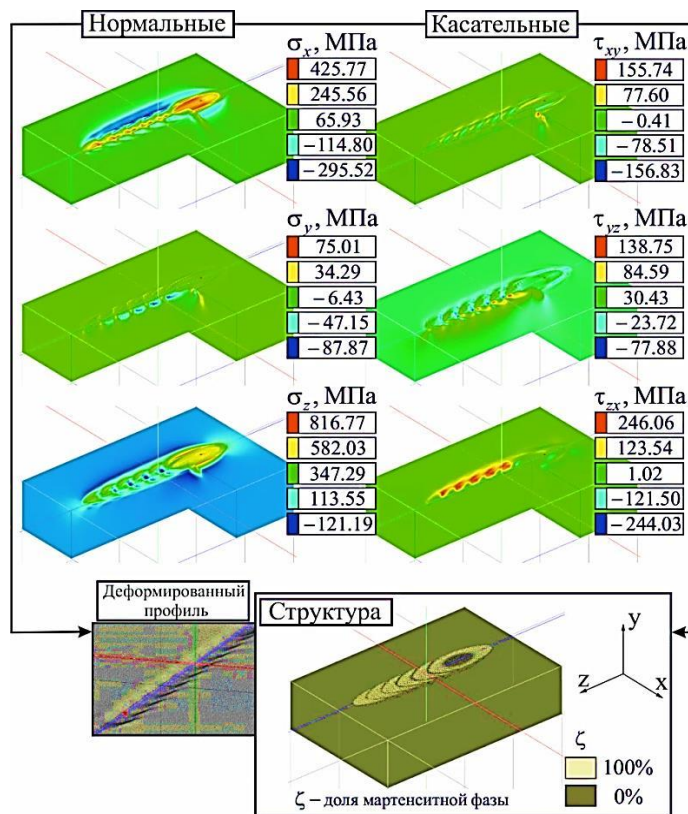


Рис. 5. Картина структуры и остаточных напряжений в поверхностном слое титанового сплава Ti6Al2V после электромеханической обработки ($I = 400 \text{ А}$, $F = 250 \text{ Н}$ со скоростью $v = 1,64 \text{ м/мин}$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagmutov, V. P. Effect of intense thermomechanical treatment on the structure and properties of titanium pseudo- α alloys during electromechanical treatment / V. P. Bagmutov, V. I. Vodop'yanov, I. N. Zakharov, A. I. Gorunov, D. S. Denisevich // Russian Metallurgy (Metally). – 2013. – Vol. 2013. – № 9. – P. 712-715.
2. Bagmutov, V. P. Relation between the fracture laws and the fatigue life of a surface-hardened pseudo- α titanium alloy / V. P. Bagmutov, V. I. Vodop'yanov, I. N. Zakharov, D. S. Denisevich. Relation between the fracture laws and the fatigue life of a surface-hardened pseudo- α titanium alloy // Russian Metallurgy (Metally). – 2016. – Vol. 2016. – № 7. – P. 663-668.
3. Fanrong, K. 3D-finite element modeling of the thermally induced residual stress in the hybrid laser/arc welding of lap joint Radovan Kovacevic / K. Fanrong, K. Radovan // Journal of Materials Processing Technology. – 2010. – Vol. 210. – P. 941-950.
4. De, A. A perspective on residual stresses in welding / A. De, T. DebRoy // Science and Technology of Welding and Joining. – 2011. – Vol. 6. – № 3. – P. 204-208.
5. Şimşir, C. Mathematical Framework for Simulation of Thermal Processing of Materials: Application to Steel Quenching / C. Şimşir, C. H. Gür // Turkish J. Eng. Env. Sci. – 2008. – №. 32. – P. 85-100.
6. Gordienko, A. I. Strukturnye i fazovye prevrashcheniia v titanovykh splavakh pri bystrom nagreve / A. I. Gordienko, A. A. Shipko. – Minsk: Nauka i tekhnika, 1983. – 336 p.



Комаров О. Н.
O. N. Komarov

ВЛИЯНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ПРИ АЛЮМОТЕРМИИ НА СВОЙСТВА ОТЛИВОК, ПОЛУЧАЕМЫХ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СПЛАВОВ

EFFECT OF PRODUCTION FACTORS IN ALUMINOTHERMY ON PROPERTIES OF RECEIVED CASTINGS FROM EXPERIMENTAL ALLOYS

Комаров Олег Николаевич – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru.

Mr. Oleg N. Komarov – PhD in Engineering, Associate professor, Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: olegnikolaevitsch@rambler.ru.

Аннотация. Получение расплавов металлов алюмотермией позволяет повысить технико-экономические показатели производств, сократить долю традиционных шихтовых материалов, эффективно переработать металлоотходы машиностроительных и металлургических предприятий, сократить потребление энергоресурсов, снизить продолжительности операций по подготовке расплавов перед заливкой в форму. Однако при применении восстановителей с высоким содержанием примесных элементов их активность снижается, что влечёт снижение температуры продуктов реакции. На температуру влияют влага, замасленность, высокое содержание инертных компонентов. Снижение температуры продуктов реакции приводит к браку литья. Для повышения температуры продуктов реакции шихтовые составы предварительно подогревают. Для определения эффективных температур подогрева смесей проведены дифференциально-термический и термогравиметрический анализы исходных компонентов композиций, которые позволили установить диапазон значений применяемых температур.

Summary. The production of metal melts by aluminothermy allows increasing the technical and economic indicators of production, reducing the share of traditional charge materials, efficiently processing metal waste of machine-building and metallurgical enterprises, reducing the consumption of energy resources, and shortening the duration of operations for preparing melts before pouring into a mold. However, when reducing agents with a high content of impurity elements are used, their activity decreases, which leads to a decrease in the temperature of the reaction products. The temperature is affected by moisture, oily high content of inert components. Reducing the temperature of the reaction products leads to a casting marriage. To increase the temperature of the reaction products, the charge compositions are preheated. To determine the effective heating temperatures of the mixtures, differential thermal and thermo gravimetric analyzes of the initial components of the compositions were carried out, which made it possible to establish the ranges of the temperatures used.

Ключевые слова: алюмотермия, термитная смесь, структура, физико-механические свойства, химический состав, литые образцы, огнеупорная оснастка, температура, металлоотходы.

Key words: aluminothermy, termite mixture, structure, physical and mechanical properties, chemical composition, cast samples, refractory equipment, temperature, metal waste.

УДК 669.094.2-926.62

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Введение

В литейном производстве сокращение себестоимости литья возможно с помощью применения в качестве шихтовых материалов отходов машиностроительных предприятий на стадиях получения расплава металла за счёт сокращения потребления энергоресурсов и снижения продолжи-

тельности процесса с применением алюмотермии [1; 2; 3]. Отходами машиностроительных предприятий являются стружка чёрных и цветных металлов, металлургическая окалина (оксиды железа), на основе которых составляются термитные смеси.

Важным является обеспечение химического состава, свойств, максимального выхода металлической фазы с единицы прореагировавшей экзотермической композиции. Регулирование химического состава получаемого металла определяет необходимость использования в термитах ферросплавов, лигатур, карбюризаторов, влияющих на тепловой баланс продуктов реакции. Чем больше в получаемом сплаве содержится примесных элементов, тем больше исходных компонентов, содержащих эти химические элементы, должно быть в составе термитной композиции. Это снижает значение пика температурного всплеска экзотермического процесса.

Предварительный подогрев смесей позволяет увеличить выход металла введением в составы большего количества наполнителя в виде стружки чёрных металлов, снизить количество дорогостоящего восстановителя и управлять свойствами металла, а также получать более стабильные параметры реакций [4]. Влияние на химический состав получаемого термитного металла оказывают также используемые огнеупорные материалы. Химический состав расплава зависит от состояния вводимого элемента, скорости и температуры протекания реакции. Температура реакции и остальные условия должны выбираться таким образом, чтобы обеспечить максимальный переход элементов из исходных составов в металлическую фазу, влияя на структуру получаемых литых заготовок [5; 6].

Применение предварительного нагрева шихты перед осуществлением реакции позволяет объединить операции термической обработки исходных компонентов с процессом получения металла, сократить время технологического цикла и затраты на энергетические ресурсы. При этом устраняется влага, замасленность и смазочно-охлаждающая жидкость, которые присутствуют в общей массе металлоотходов и ухудшают показатели процесса. За счёт предварительного термического воздействия реагирующая система получает дополнительный запас тепла, что позволяет вводить в экзотермические составы больше корректирующих химический состав компонентов и получать средне- и высоколегированные сплавы.

Цели и задачи исследования

Целью работы является изучение влияния температур предварительного нагрева исходных компонентов на изменение их свойств и свойств получаемых сплавов из шихтовых составов, сформированных из исследуемых материалов.

Для реализации поставленной цели решались следующие задачи:

- исследование поведения применяемых материалов при предварительном термическом воздействии и выявление, исходя из их свойств, допустимых температур нагрева шихты перед осуществлением экзотермического процесса;
- выявление закономерностей влияния температурных режимов нагрева шихты на химический состав получаемого термитного металла;
- исследование структур образцов из термитного металла, получаемого с использованием углеродных форм;
- определение параметров физико-механических свойств образцов из экспериментальных сплавов.

Методы и материалы

Термогравиметрический и дифференциально-термический анализы компонентов термитной смеси, материалов огнеупорной оснастки проводился на приборе дифференциально-термического анализа Shimadzu DTG-60H.

Экзотермические реакции проводили в огнеупорных тиглях, выполненных из боя графитированных электродов, применяемых для плавки стали в электродуговых печах марки ЭГ15 по ТУ 14-139-177-2003 «Электроды графитированные диаметром от 75 до 555 мм и ниппели к ним. Технические условия». Плотность огнеупорного материала 1700 кг/м^3 . Объём рабочего пространства тигля $0,000572 \text{ м}^3$, толщина стенки $0,01 \text{ м}$. Масса тигля составляла $0,71 \text{ кг}$. Объём рабочего пространства соответствовал засыпке смеси с минимальной насыпной плотностью мас-



сой 1 кг для получения образца необходимого размера. Тигель после засыпки смеси накрывали крышкой с отверстием для выхода газов (диаметр 20 мм). Внутренний диаметр тигля равен высоте его рабочего пространства, которая составляет 0,09 м. В дне тигля устанавливалась разовая вставка с отверстием диаметром 0,007 м для стабилизации скорости разливки расплава. Смеси перед реакцией не уплотнялись. Отверстие для слива металла закрыто диском-стопором (диаметр 0,05 м и толщина 0,005 м) из графита той же марки [13].

После прохождения реакции и выдержки расплава в тигле в течение 10 секунд для обеспечения разделения металла и шлака стопор выбивается и форма для экспериментальных образцов заполняется металлом. Форма для получения образцов представляет собой цилиндр с глухим дном из графита марки ЭГ15 с внутренним диаметром 0,03 м, толщиной стенки 0,03 м и высотой 0,15 м.

Перед проведением экспериментов огнеупорная оснастка нагревается до 150 °С и покрывается противопожарной краской следующего состава: маршалит – 20 %, жидкое стекло – 5 %, вода – 74 %, борная кислота – 1 % [7].

Железоалюминиевая термитная смесь включает восстановитель и железную окалину фракций 0,2–1,5 мм следующего химического состава: восстановитель – Al = 89,443 %; Mg = 3,917 %; Zn = 2,961 %; Cu = 2,040 %; Si = 1,097 %; Mn = 0,304 %; Fe = 0,166 %; Cr = 0,062 %; Ni = 0,008 %; железная окалина – Fe = 71,500 %; O₂ = 22,639 %; Si = 2,960 %; Mn = 1,188 %; Al = 0,697 %; Cu = 0,444 %; Ni = 0,188 %; Cr = 0,173 %; C = 0,150 %; S = 0,030 %; P = 0,030 %.

Подготовка термитных смесей осуществлялась перемешиванием в смесителе в течение 10 мин; сушке при значении температуры, равном 150 °С в течение 1 часа; повторном перемешивании в течение 10 мин, при котором происходит гомогенизация композиции и незначительное дробление компонентов, очистка поверхности частиц восстановителя от оксидной плёнки. Этот процесс усиливает взаимодействие между реагирующими материалами. Химический состав образцов определяли с помощью оптико-эмиссионного спектроанализатора Q4 TASMAR 170 BRUKER. Образцы для испытания на разрыв изготавливались в соответствии с ГОСТ 1497-84 «Металлы. Методы испытаний на растяжение». Исследование предела прочности на разрыв проводили на универсальной испытательной машине AG-X plus SHIMADZU при постоянной скорости перемещения захватов 0,01 мм/с. Определение таких механических свойств, как предел прочности на разрыв σ_b , относительное удлинение δ и твёрдость по Роквеллу проводилось по общепринятым методикам. При определении микроструктуры металла отливок использовали микроскоп оптический AXIO VERT A1 с цифровой камерой AxioCam ERc5s и растровый сканирующий микроскоп ZEISS EVO LS10 с приставкой для элементного анализа OXFORD Xmaxⁿ.

Основная часть

Выбор режимов предварительного нагрева шихты основывается на проведении дифференциально-термического и термогравиметрического анализов исходных материалов для составления термитных композиций и материалов огнеупорной оснастки. Анализом источников установлено, что большинство превращений происходит в интервале температур подогрева 25...600 °С [9; 10].

В табл. 1 представлены возможные соединения в материалах, условия их образования и разложения. Данные табл. 1 частично подтверждаются результатами термогравиметрического анализа при нагреве используемых материалов. Несколько искажают картину превращений примесные элементы, содержащиеся в окалине и алюминиевом сплаве (в чистом виде и в виде окислов, гидроокислов и гидридов), а также взаимное наложение процессов диссоциации, окисления и восстановления [11].

Таблица 1

Возможные соединения в материалах и температуры их превращений

Соединения до нагрева	Температура перехода, °С	Соединения, образующиеся после нагрева
1. AlH ₃	Более 105 °С – разлагается	Al
2. Al ₂ O ₃ ·3H ₂ O (гипсбит)	Более 150 °С – переход	Al ₂ O ₃ ·H ₂ O (бемит)

Продолжение таблицы 1

Соединения до нагрева	Температура перехода, °С	Соединения, образующиеся после нагрева
3. $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$ (гидраргелит)	180...200 °С – переход	$Al_2O_3 \cdot H_2O$ (бемит)
4. $Al_2O_3 \cdot H_2O$ (бемит)	Более 300 °С – переход	Al_2O_3
5. $Al_2O_3 \cdot H_2O$ (диаспор)	Более 420 °С – переход	Al_2O_3
6. $Fe(OH)_2$	150...200 °С – разлагается	Fe
7. $Fe(OH)_3$	500 °С – переход	Fe_2O_3

На рис. 1 и 2 представлены дифференциально-термический и термогравиметрический анализы применяемых оксидов железа. Согласно графику потребление тепла оксидами железа происходит по первому пику до значения температуры, равного 107 °С, когда происходит их нагрев. Далее, до значения температуры, равного 350 °С, следует выделение тепла, связанное с разложением отдельных групп соединений железа.

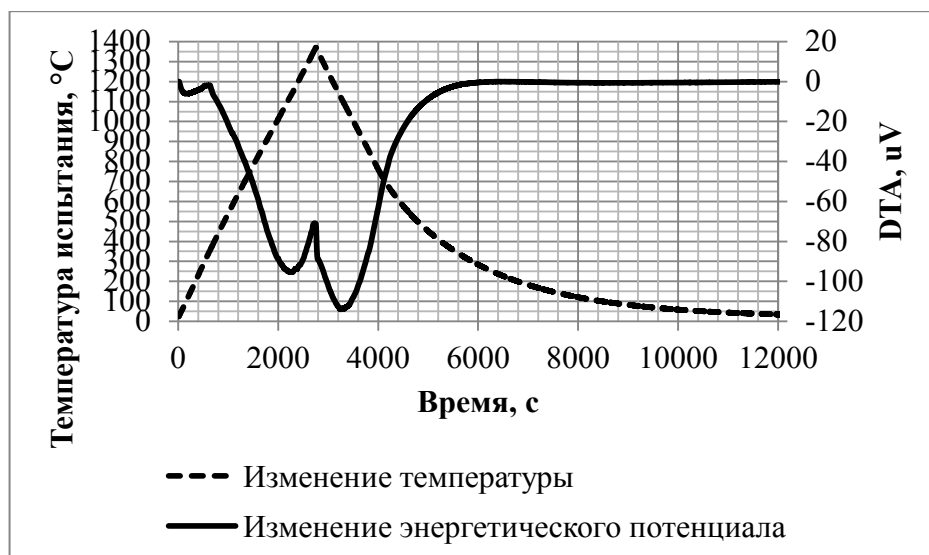


Рис. 1. Дифференциально-термический анализ оксидов железа

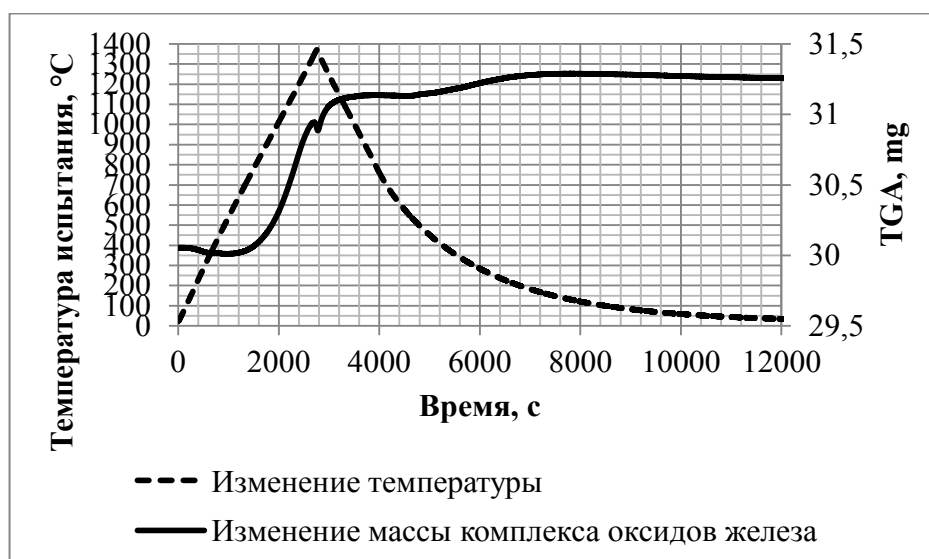


Рис. 2. Термогравиметрический анализ оксидов железа

Нагрев окалины при значении температуры выше 350 °С приводит к перекрытию потребляемым теплом выделяемого. При этом уменьшение массы образца происходит до значения температуры, равного 525 °С, что говорит о продолжающемся разложении соединений на основе железа. Далее следует постепенное увеличение массы образцов оксида железа вследствие присоединения кислорода. Дальнейший нагрев образцов до температуры 600 °С приводит к началу увеличения их массы.

Исследуемая масса незначительно присоединяет кислород, соответственно, можно сказать, что сохраняется стехиометрическое соотношение оксидов железа и восстановителя. Нагрев оксидов железа от 600 °С до 1342 °С провоцирует усиление потребления кислорода, что приводит к смещению стехиометрического соотношения компонентов.

Особо активное окисление отмечено при температуре 1142 °С, когда объём выделяемого тепла за счёт окисления больше потребляемого. При нагреве термитных смесей при температуре выше 600 °С будет наблюдаться нехватка восстановителя, что может повлиять на выход металла.

На рис. 3 и 4 представлены дифференциально-термический и термогравиметрический анализы применяемого восстановителя.

Анализ полученных термограмм при испытании восстановителя показал, что пик разложения соединений, содержащих газообразные продукты, соответствует значению температуры испытания, равному 338 °С. При этом уменьшение массы образца наблюдается при его нагреве до температуры 565 °С. Далее, наблюдается увеличение массы восстановителя при температуре его нагрева до 600 °С.

Более интенсивное увеличение массы восстановителя наблюдается при температуре нагрева выше 800 °С. Активное окисление с выделением тепла, превышающее потребляемое, начинается при температуре 955 °С.

Таким образом, при нагреве восстановителя до температуры 600 °С необходимо контролировать время нахождения смеси в подогревающей среде, чтобы смещение стехиометрического соотношения компонентов было несущественным, либо заранее использовать расчётное повышенное содержание восстановителя.

Исследования показали, что за время испытания при нагреве до 1400 °С образец восстановителя полностью переходит в оксид.

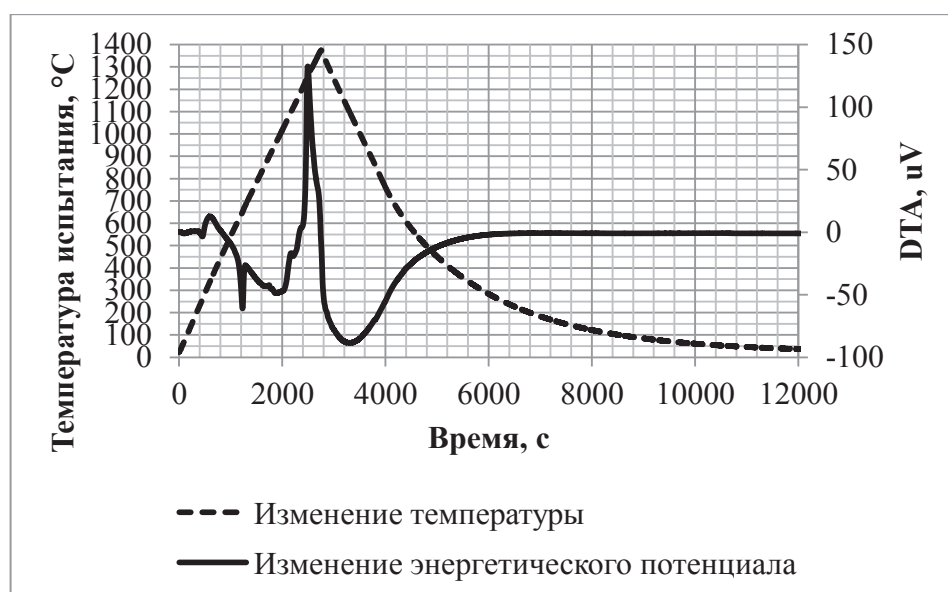


Рис. 3. Дифференциально-термический анализ восстановителя

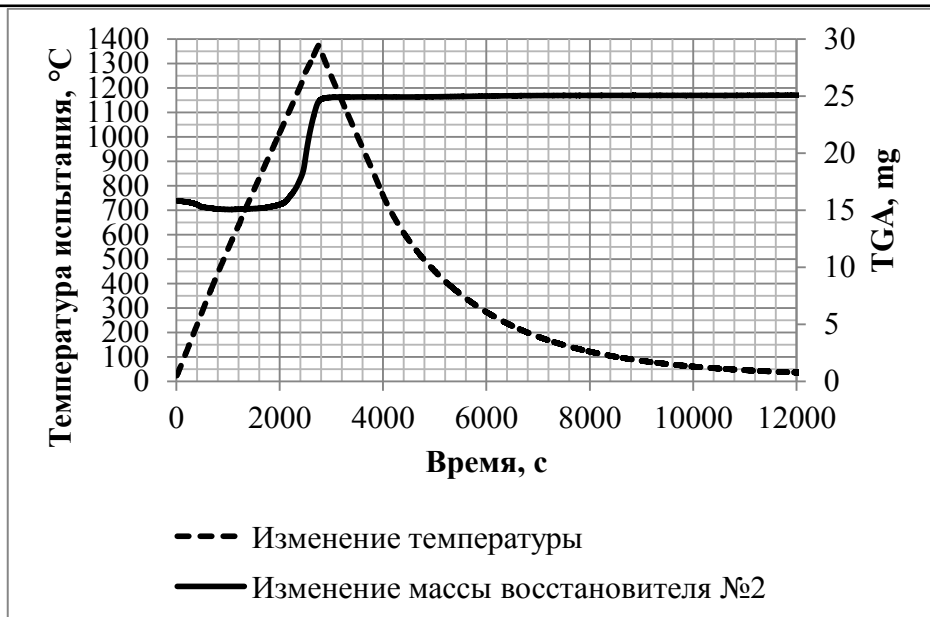


Рис. 4. Термогравиметрический анализ восстановителя

Применяемые для изготовления форм и тиглей углеродные материалы не имеют высокой стабильности при высоких температурах. Интенсивное окисление, переход в газовую фазу продуктов окисления и унос их в атмосферу начинается уже при температуре 608 °С, что подтверждается графиками DTA и TGA анализа. При нагреве углеродных материалов до температуры 200 °С средняя скорость их окисления составляет 0,000027 %/с, в интервале температур 200...400 °С скорость окисления равна 0,000166 %/с, а в интервале температур 400...600 °С скорость окисления составляет 0,000559 %/с. В интервале нагрева углеродных материалов 600...1000 °С происходит их наиболее интенсивное окисление со скоростью 0,023 %/с по линейной зависимости. Преобладание тепла, выделяющегося при окислении над потреблённым теплом, продолжается до значения температуры, равного 802 °С, после которого происходит смена доминанты, и до достижения значения температуры, равного 1000 °С, наблюдается потребление энергии. Общее падение массы углеродного образца во время эксперимента составило 38,95 %.

Таким образом, проведённые исследования позволили установить диапазон применяемых температур подогрева 25...400 °С, при которых происходит большая часть превращений в компонентах термитных составов.

При этом не меняется стехиометрическое соотношение комплекса оксидов железа и восстановителя, углеродная оснастка работает не на критических температурах, а также реагирующая система получает дополнительный энергетический запас. В производственных условиях неизменность стехиометрического соотношения будет играть большую роль, так как контролировать этот фактор трудно, при этом он влияет на химический состав получаемого металла и его свойства. Экспериментально установлено, что повышение температуры более 400 °С провоцирует снижение стойкости тиглей, насыщение сплавов углеродом при отсутствии в составе термита инертных к снижению выхода термитного металла наполнителей, повышение выхода шлаковой и газовой фаз, выброс продуктов реакции за пределы тигля.

Управление химическим составом получаемых расплавов осуществляется регулированием температуры продуктов реакции при изменении начальной температуры термитных смесей. На рис. 5 приведена динамика изменения содержания примесных элементов, полученных на основе базового термитного состава.

Определено, что повышение температуры продуктов реакции для каждого элемента влияет индивидуально. Содержание некоторых элементов в сплаве при изменении температуры циклично изменяется во всём диапазоне температур.

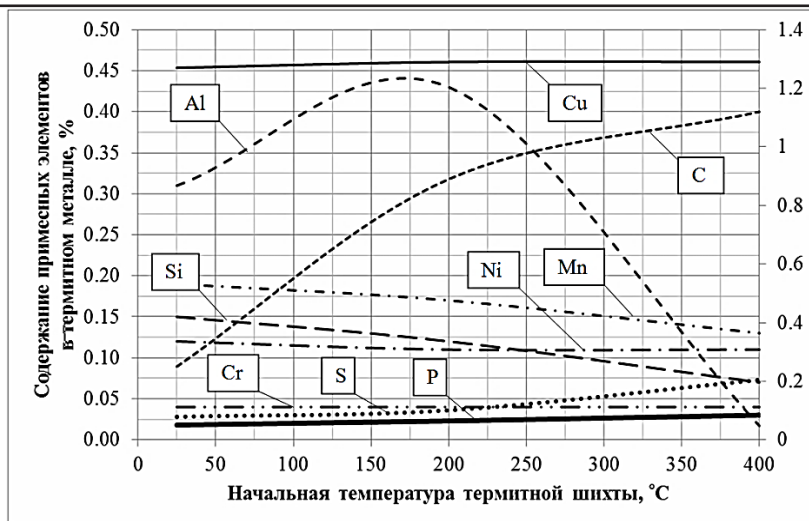


Рис. 5. Влияние предварительной температуры нагрева шихты на содержание химических элементов в сплавах (содержание углерода и меди по вспомогательной оси)

Значительный рост содержания углерода и серы наблюдается при повышении температур подогрева шихты. При использовании базового состава при большинстве температурных режимов шихты в заготовках присутствуют газопоры, являющиеся следствием нахождения в сплаве большого количества газов, выделяющихся при затвердевании заготовки. Для исследования физико-механических свойств были изготовлены образцы типа «Цилиндр» из сплавов, полученных из базовой термитной композиции при предварительном температурном воздействии 25 °C и 200 °C. Выбор указанных выше температурных режимов получения литых образцов обосновывается наиболее удовлетворительным качеством металла в продольных сечениях исследуемых образцов.

На рис. 6 представлены диаграммы растяжения образцов, полученных из базового термитного состава при указанных выше температурах шихты.

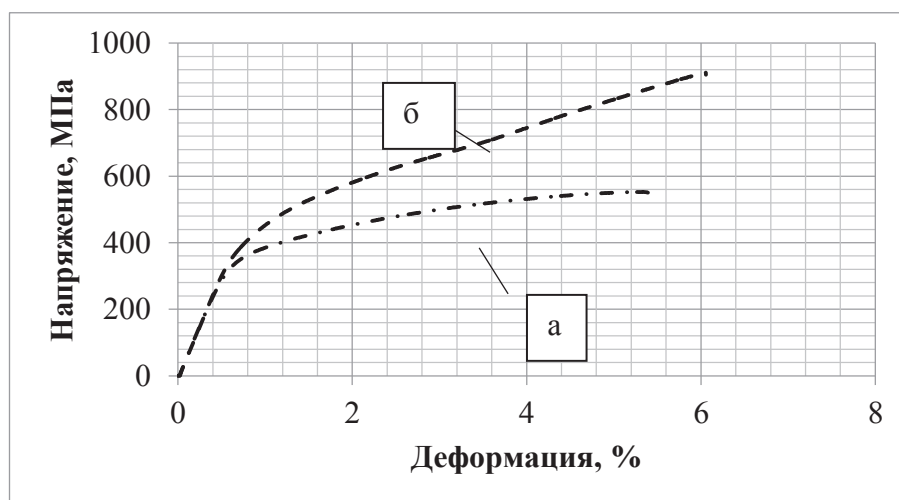


Рис. 6. Диаграммы растяжения экспериментальных сплавов, полученных из базового термитного состава при разных температурах шихты: а – температура шихты 25 °C; б – температура шихты 200 °C

Характер разрушения аналогичен для большинства получаемых образцов из термитных сплавов с использованием базового термитного состава. Все образцы имеют излом, характеризующийся как кристаллический с хрупким разрушением. Так называемая площадка текучести на диаграмме растяжения всех образцов отсутствует, что соответствует средне- и высокоуглероди-

Комаров О. Н.

ВЛИЯНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ПРИ АЛЮМОТЕРМИИ НА СВОЙСТВА ОТЛИВОК,
ПОЛУЧАЕМЫХ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СПЛАВОВ

стым сталям, а также сталям, прошедшим специальную термообработку, полученным традиционными способами. В табл. 2 представлены сравнительные характеристики образцов сплавов, полученных при использовании базового состава в зависимости от начальных температур нагрева термитных композиций.

Таблица 2

Температурные режимы получения, химический состав и механические свойства при растяжении образцов, полученных при использовании базового состава

Химический элемент	Химический состав образцов, %	
Температуры шихты	25	200
Углерод	0,250	0,890
Марганец	0,190	0,170
Кремний	0,150	0,120
Сера	0,028	0,036
Фосфор	0,018	0,023
Хром	0,040	0,040
Никель	0,120	0,110
Медь	1,270	1,290
Алюминий	0,310	0,430
Железо	97,624	96,891
Свойства образцов		
Предел прочности на растяжение, МПа	552,39	911,34
Относительное удлинение образца, %	5,3	6,05
Средняя твёрдость, НРС (~НВ)	6,8 (~178)	34,7 (~330)

Микроструктуры образцов из базового состава при различных температурных режимах различаются структурными составляющими. На это влияет химический состав получаемых сплавов. На рис. 7 представлены микроструктуры образцов, полученных с применением базового состава и меняющихся температурных параметров шихты [12].

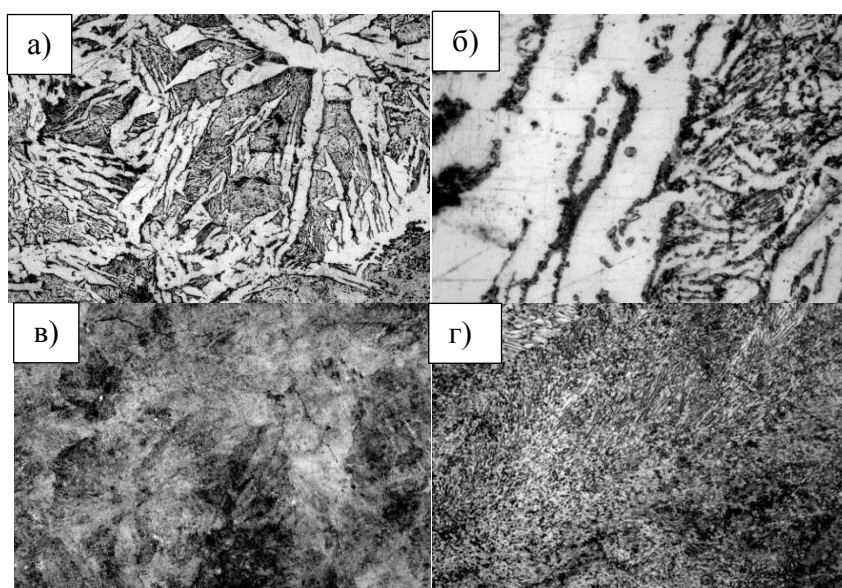


Рис. 7. Микроструктура образцов типа «Цилиндр» при разных увеличениях, полученных из термитных сплавов с применением базового состава при температурах шихты: а – 25 °С (x200); б – 25 °С (x1000); в – 200 °С (x200); г – 200 °С (x1000)



Микроструктура образца, полученного из базового состава без температурного воздействия на шихту, указана на рис. 7, а и б, с основной своей структурной составляющей-мартенситом (тёмная составляющая) с размером зерна до 10 баллов по ГОСТ 8233-56 «Сталь. Эталоны микроструктуры». Феррит (светлая составляющая) расположен между выделяющимися иглами мартенсита. Структура соответствует литому состоянию.

Образец, полученный из базового состава с температурными параметрами шихты 200 °С, имеет колонии мелкодисперсного перлита с плохо различимой пластинчатой структурой. Микроструктура данного образца указана на рис. 7, в и г. Цементит находится в структурно-свободной форме, достигая 0 баллов по ГОСТ 5640-68 «Сталь. Металлографический метод оценки микроструктуры листов и ленты». Границы зёрен трудно просматриваются. Структура соответствует литому состоянию. Режим литья обеспечил высокий температурный градиент между металлом и формой, а также высокую скорость охлаждения металла в форме, при которой произошло измельчение структуры.

Выводы

Проведённые дифференциально-термический и термогравиметрический анализы исходных компонентов термитных смесей позволили установить эффективный температурный диапазон предварительного нагрева композиций 25...400 °С. При использовании данного температурного диапазона происходит разложение различных гидроксидных групп соединений, удаление из материалов неметаллических включений, влаги и так далее; реагирующая система получает дополнительный энергетический запас. Изменение массы исходных компонентов термитных смесей в данном диапазоне температур нагрева незначительно, следовательно, стехиометрическое соотношение компонентов железо-алюминиевого термита остаётся неизменным, что даёт возможность получать на производстве литые заготовки с прогнозируемыми свойствами.

Содержание большинства химических элементов в сплавах при использовании предварительного нагрева термитных шихт предсказуемо. Их содержание в сплавах изменяется незначительно. Сложно поддаются прогнозированию остаточное содержание алюминия в сплавах и содержание углерода и серы: последние при применении углеродной огнеупорной оснастки активно насыщаются из тиглей, достигая в ряде случаев недопустимых значений. В диапазоне температур подогрева их содержание может различаться в разы.

Микроструктуры получаемых образцов экспериментальных сплавов соответствуют литому состоянию и различаются структурными составляющими. В ряде случаев образцы обладают удовлетворительными свойствами и не требуют дополнительной термообработки. Равномерность распределения химических элементов по структуре и отсутствие ликваций характерны для всех экспериментальных образцов.

Образцы при испытании на разрыв имеют излом, характеризующийся как кристаллический с хрупким разрушением. Так называемая площадка текучести на диаграмме растяжения всех образцов отсутствует. Предел прочности образцов, полученных при температурах шихты 25...200 °С, достигает 911,34 МПа при невысоком относительном удлинении (6,05 %), что определяется высокими внутренними напряжениями. Твёрдость исследуемых образцов, полученных из базового термитного состава при изменяющихся температурах шихты, имеет достаточно высокие показатели в сравнении со сплавами, схожими по химическому составу, полученными по традиционным технологическим процессам и подвергающимися характерной термообработке.

Таким образом, применение предварительного нагрева термитных смесей позволяет управлять свойствами получаемых экспериментальных сплавов при алюмотермии, получая из одного состава сплавы из различных классификационных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новохацкий, В. А. Малоотходная технология производства стальных отливок с экзотермическими прибылями / В. А. Новохацкий, А. А. Жуков, Ю. И. Макарьчев. – М.: Машиностроение, 1986. – 64 с.
2. Комаров, О. Н. Использование термитных материалов в технологиях получения стальных отливок: монгр. / О. Н. Комаров, И. Г. Сапченко, С. Г. Жилин. – Владивосток: Изд-во Дальнаука, 2008. – 166 с.
3. Малкин, Б. В. Термитная сварка / Б. В. Малкин, А. А. Воробьев. – М.: Изд-во МКХ РСФСР, 1963. – 105 с.

Комаров О. Н.

ВЛИЯНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ ПРИ АЛЮМОТЕРМИИ НА СВОЙСТВА ОТЛИВОК,
ПОЛУЧАЕМЫХ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СПЛАВОВ

4. Использование алюминиевого сплава с высоким содержанием примесных элементов в качестве восстановителя для получения сортовых марок сталей при алюмотермии / В. В. Предеин, А. В. Попов, О. Н. Комаров, С. Г. Жилин, А. И. Евстигнеев // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2017. – № III - 1(31). – С. 106-114.
5. Влияние начальных температур шихты и формы на структуру и физико-механические свойства литых заготовок, получаемых при алюмотермитном переплаве / В. В. Предеин, О. Н. Комаров, А. В. Попов, С. Г. Жилин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2017. – Т. 19. – № 4. – С. 24-40.
6. Свойства термитных сталей из отходов металлургического производства / О. Н. Комаров И. Г. Сапченко, С. Г. Жилин, Н. Г. Зиновьев // Металлургия машиностроения. – 2007. – № 5. – С. 26-28.
7. Специальные способы литья: справочник / В. А. Ефимов, Г. А. Анисович, В. Н. Бабич [и др.]; под общ. ред. В. А. Ефимова. – М.: Машиностроение, 1991. – 436 с.: ил.
8. Комаров, О. Н. Особенности получения металлошихты из отходов машиностроительных предприятий [Электронный ресурс] / О. Н. Комаров, С. Г. Жилин, И. Г. Сапченко, А. В. Попов. – Режим доступа: <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=39650> (дата обращения: 08.01.2016).
9. Рабинович, В. А. Краткий химический справочник / В. А. Рабинович, З. Я. Хавин. – Л.: Химия, 1991. – 432 с.
10. Борнацкий, И. И. Основы физической химии: учеб. для техникумов / И. И. Борнацкий. – М.: Металлургия, 1989. – 320 с.
11. Бигеев, А. М. Металлургия стали / А. М. Бигеев. – Челябинск: Металлургия: Челяб. отд-ние, 1988. – 480 с.
12. Комаров, О. Н. Влияние особенностей переплава алюмотермитной шихты на образование агрегатных фаз, структуру и физико-механические свойства отливок / О. Н. Комаров, А. В. Попов, И. Г. Сапченко // Деформация и разрушение материалов и наноматериалов: материалы VI Междунар. конф., Москва, 10–13 ноября 2015 г. – Москва: ИМЕТ РАН, 2015. – С. 398-399.
13. The Influence of Structure on Strength Properties of Casting Steel Obtained with the Use of Thermite Materials / O. N. Komarov, S. G. Zhilin, D. A. Potianikhin, V. V. Predein, E. E. Abashkin, A. A. Sosnin A. V. Popov // AIP Conference Proceedings. – Vol. 1785. – P. 1-5.



Евстигнеев А. И., Одинокоев В. И., Свиридов А. В., Дмитриев Э. А., Петров В. В.
A. I. Evstigneev, V. I. Odinokov, A. V. Sviridov, E. A. Dmitriev, V. V. Petrov

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МОНОСЛОЙНЫХ ЭЛЕКТРОФОРЕТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКОВЫХ ФОРМ

MATHEMATICAL MODELING OF THE MODE DEFORMATION OF MONOLAYER ELECTROPHERIC SHELLS FORMS

Евстигнеев Алексей Иванович – заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-69; +7 (4217) 54-95-38. E-mail: mail@imim.ru.
Mr. Aleksey I. Evstigneev – Doctor of Engineering, Professor, Chief Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-69; +7 (4217) 54-95-38. E-mail: mail@imim.ru.

Одинокоев Валерий Иванович – заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор технических наук, профессор-консультант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: diss@knastu.ru.
Mr. Valery I. Odinokov – Doctor of Engineering, Professor, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: diss@knastu.ru.

Свиридов Андрей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры машиностроения и металлургии Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: mim@knastu.ru.
Mr. Andrey V. Sviridov – PhD in Engineering, Associate professor, Mechanical Engineering and Metallurgy Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: mim@knastu.ru.

Дмитриев Эдуард Анатольевич – доктор технических наук, профессор, ректор Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: office@knastu.ru.
Mr. Eduard A. Dmitriev – Doctor of Engineering, Professor, Rector of Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: office@knastu.ru.

Петров Виктор Викторович – доктор технических наук, профессор кафедры технологии переработки нефти и полимеров Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: tnp@knastu.ru.
Mr. Viktor V. Petrov – Doctor of Engineering, Professor, Oil and Polymer Processing Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: tnp@knastu.ru.

Аннотация. В работе рассмотрена математическая модель напряжённо-деформированного состояния процесса затвердевания металла отливки после его заливки в однослойную (монокристаллическую) оболочковую форму (ОФ). Представлен общий алгоритм моделирования напряжённо-деформированного состояния монослойных электрофоретических форм, получены расчётные распределения напряжений в электрофоретической оболочковой форме при моделировании плавного её нагрева. Установлена наибольшая вероятность возникновения трещин в средних слоях холодных электрофоретических форм.

Summary. The authors study mathematical model of the mode deformation of a casting metal solidification after its casting into a single-layered monolithic electrophoretic shell. A general algorithm for simulating the mode deformation of monolayer electrophoretic forms is presented. Calculated stress distributions in the electrophoretic shells are presented when modelling its smooth heating. The greatest probability of occurrence of cracks in middle layers of cold electrophoretic forms is established.

Ключевые слова: напряжённно-деформированное состояние, электрофоретическая оболочковая форма, моделирование нагрева, металл, упругопластические деформации, Эйлера система координат, фазовый переход.

Key words: mode of deformation, electrophoretic shell shape, heating simulation, metal, elastoplastic deformations, Eulerian coordinate system, phase transition.

УДК 621.74

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Повышение конструктивной сложности и точности литых деталей, наряду с требованиями минимизации трудовых затрат, ресурсосбережения и эффективной защиты окружающей среды, значительно влияет на направления развития технологий производства отливок. Постоянное повышение требований к качеству литых изделий сказывается и на требованиях, предъявляемых к литейным формам.

В представленной работе построена математическая модель напряжённно-деформированного состояния (НДС) процесса затвердевания металла отливки после его заливки в однослойную (монолитную электрофоретическую) оболочковую форму. При этом использовалась та же система дифференциальных уравнений, что и в работе [4], только в осесимметричном виде.

Решение задачи осуществлялось тем же численным методом по программе «Одиссей», что и в работах [4; 5].

При разработке математической модели процесса учитывалось, что моделируемая система на начальном этапе является двухкомпонентной: жидкий металл – форма. С течением времени за счёт изменения температурных полей система переходит в трёхкомпонентную: жидкий металл I (ЖМ) – твёрдый металл II (ТМ) – форма III (см. рис. 1). Моделирование взаимодействия этих трёх компонентов в изменяющемся со временем поле температур при наличии заданного давления жидкого металла на форму P_1 и являлось целью данной работы.

Рассматривается осесимметричное тело вращения. Движение считается медленным. Имеем трёхкомпонентную систему. Деформируемая среда – затвердевший металл (область II) и форма (область III) – изотропные материалы. Процесс – нестационарный. Используя теорию малых упругопластических деформаций и Эйлерову систему координат для каждой из областей, получим систему уравнений [1; 5]:

Область I:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = P_1, \\ \theta = a_1 \Delta \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Области II, III:

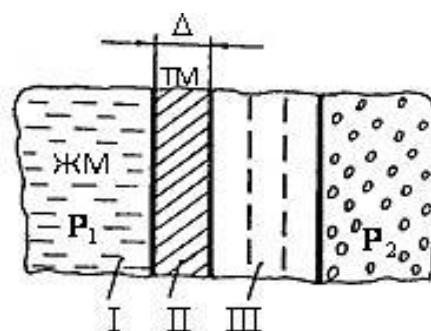


Рис. 1. Схема расположения областей системы: I – жидкий металл; II – затвердевший металл; III – форма; P_1 и P_2 – силы давления на оболочковую форму со стороны металла и опорного наполнителя

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \\ \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2G_p \varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \\ \varepsilon_{ii} &= 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta_n - \theta_p^*); \quad \varepsilon_{ij} = 0,5(U_{i,j} + U_{j,i}), \\ \dot{\theta} &= \alpha_p \Delta \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; G_p ($p = \text{II, III}$) – модуль сдвига металла ($p = \text{II}$) и формы ($p = \text{III}$); ε_{ij} – деформации; k_p – коэффициенты объёмного сжатия; σ – гидростатическое напряжение; α_p – коэффициенты линейного расширения; θ_n – текущая температура; θ_p^* – начальные температуры в областях $p = \text{I, II, III}$; $U_{i,j}$ – перемещения; a_p – коэффициенты теплопроводности ($p = \text{I, II, III}$); τ – время.

В процессе охлаждения жидкого металла при условии, что температура металла $\theta_M \leq \theta_K$ (θ_K – температура кристаллизации), определяется толщина затвердевшего слоя из решения уравнения межфазового перехода:

$$\frac{d\theta_1}{dn} \lambda_1 - \frac{\theta_2}{dn} \lambda_2 = \frac{d\Delta}{dt} L \rho, \quad (3)$$

где θ_1 и θ_2 – температуры соответственно в твёрдой и жидкой фазах; λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности в соответствующих фазах; Δ – толщина корочки; L – скрытая теплота плавления; ρ – плотность; n – нормаль к границе двух фаз.

Время процесса кристаллизации τ_* разбивается на малые шаги $\Delta\tau_n$ (n – номер временного шага). На каждом временном шаге $\Delta\tau_n$ вычисляется толщина твёрдой фазы Δ_n ($\Delta = \sum_1^n \Delta_n$).

При этом предполагается, что значение температуры в твёрдой фазе по толщине Δ_n изменяется по линейному закону и градиент температуры в жидкой фазе равен нулю. С учётом этого решение уравнения (3) даёт следующую зависимость для определения толщины закристаллизовавшейся корочки Δ_n на временном шаге $\Delta\tau_n$:

$$\Delta_n = C \sqrt{\Delta\tau_n}, \quad C = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1 \lambda_1}{\rho L}}. \quad (4)$$

Здесь $\Delta\theta_1$ – перепад температур в твёрдой фазе вблизи фронта кристаллизации.

При осевой симметрии имеем

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0; \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0; \quad U_3 = 0. \quad (5)$$

В соответствии с работой [5] уравнения (2) и значения ε_{ij} с учётом (5) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{13} \Delta S_{12} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + S_{12} \Delta S_{13} (\sigma_{11} - \sigma_{33}) + 0,5 \Delta \sigma_{11} S_{12} S_{13} + \\ + 0,5 \Delta \sigma_{12} S_{21} S_{23} + (S_{21} \Delta S_{23} + 2S_{23} \Delta S_{21}) \sigma_{12} = 0, \\ S_{21} \Delta S_{23} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + S_{23} \Delta S_{21} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 0,5 \Delta \sigma_{22} S_{23} S_{21} + \\ + 0,5 \Delta \sigma_{21} S_{12} S_{13} + (S_{12} \Delta S_{13} + 2S_{13} \Delta S_{12}) \sigma_{21} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11} - \sigma_{22} &= 2G_p (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= 2G_p (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33});\end{aligned}\quad (7)$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta_n - \theta_p^*). \quad (8)$$

Здесь $\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)$, $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1$, ($i, j = 1, 2, 3$), тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{2\Delta U_1}{S_{21}} + \frac{2U_2}{S_{21}} \cdot \frac{\Delta S_{21}}{S_{12}}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{2\Delta U_2}{S_{32}} + \frac{2U_1}{S_{12}} \cdot \frac{\Delta S_{12}}{S_{21}}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{2U_1}{S_{13}} \cdot \frac{\Delta S_{13}}{S_{31}} + \frac{2U_2}{S_{23}} \cdot \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}}.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь $U_i = U_i^1 + U_i^2$, $\Delta U_i = U_i^2 - U_i^1$, ($i = 1, 2$).

При этом S_{ik}^j , ($i, k = 1, 2, 3; j = 1, 2$) – величина дуги средней линии, расположенной на грани j вдоль координаты α_k и перпендикулярной координате α_i . Значения S_{ik}^j вычисляются как средние от значений дуг границы граней. Вводятся обозначения $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$, $\Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$. Расположение σ_{ij} и U_i по граням элемента показано на рис. 2.

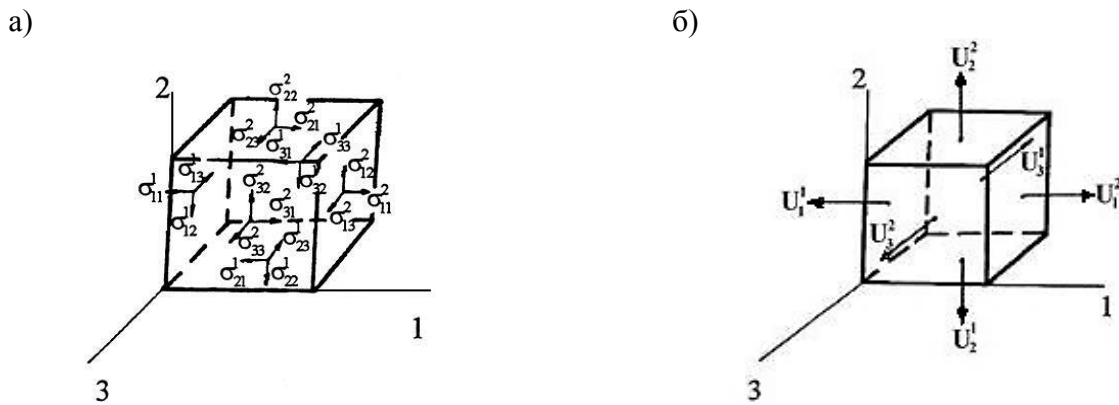


Рис. 2. Расположение σ_{ij} и U_i по граням элемента:
 а – распределение напряжений; б – распределение перемещений

Уравнения (6), (9) записаны с учётом того, что $\frac{\partial U_1}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} = 0$; $i = 1, 2, 3$; для тел вращения имеют место $\Delta S_{31} = 0$; $\Delta S_{32} = 0$; $\frac{\Delta \bar{U}_1}{S_3} = 0$, $\frac{\Delta \bar{U}_2}{S_3} = 0$; $U_3 = 0$; на поверхности $x_1 x_3$: $S_1^+ - S_1^- = 0$; на поверхности $x_2 x_3$: $S_2^+ - S_2^- = 0$ сдвиговые значения ε_{ij} ($i \neq j$) запишутся для узла сетки в следующем виде:

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{2\Delta \bar{U}_2}{S_1} - 0,5\bar{U}_2 \frac{S_2^+ - S_2^-}{S_1 S_2} + \frac{2\Delta \bar{U}_1}{S_2} - 0,5\bar{U}_1 \frac{S_1^+ - S_1^-}{S_1 S_2}, \quad (10)$$

где $S_i = S_i^1 + S_i^2$; $\Delta \bar{U}_i = \bar{U}_i^2 - \bar{U}_i^1$; $S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}$; $S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}$; значения \bar{U}_i^j вычисляются как средние от значений U_i по граням элемента. В работе [5] доказано, что разностный аналог систем (6)–(8), с учётом (9) при наличии начальных и граничных условий, является определяемым. Размерность систем (6)–(8) значительно сокращается при осуществлении следующих операций:

1. Разности $(\sigma_{ii} - \sigma_{jj})$ в уравнениях (6) выражаются через (7).

2. Уравнение сохранения массы переписывается в рекуррентной форме с учётом выражений (9) в виде $U_1^2 = U_1^1 + [A]$, где $[A]$ – оператор, не содержащий U_1^2 ; направление обхода области по x_1 (\rightarrow), по x_2 (\uparrow).

3. Определяются сдвиговые выражения ε_{ij} ($i \neq j$) по внутренним узлам сетки в соответствии с формулами (10); $i = 1, j = 2$.

4. Определяются σ_{ij} ($i \neq j$) по внутренним узлам сетки из уравнений состояния: $\sigma_{12}^0 = G_p^0 \varepsilon_{12}^0$.

5. Определяются σ_{ij} по внешним узлам сетки из граничных условий, а на контактных поверхностях – из закона трения.

6. Определяются σ_{ij} по граням элементов как средние от значений σ_{ij} в узлах граней.

7. Первое уравнение (6) переписывается в рекуррентном виде: $\sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 + [B]$, где $[B]$ – оператор, не содержащий σ_{11}^1 , направление обхода области x_1 (\leftarrow), x_2 (\downarrow).

8. Из системы уравнений – второе уравнение в системе (6) и уравнение $\sigma_{22} - \sigma_{11} = 2\lambda(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})$ – определяются значения σ_{22}^1 и σ_{22}^2 для элемента и составляются уравнения вида $F_3 = (\sigma_{22}^2)_{JJ} - (\sigma_{22}^1)_{JJ+1} = 0$ для внутренних граней, где J – индекс элемента по координате x_2 .

Таким образом, если положить за независимые переменные $X = \{U_2, U_1|_{x_1=0}, \sigma_{11}|_{x_1=x_1^*}\}$, то, пробагая последовательность (1÷7), можно определить зависимые переменные через X (x_1^* – конечное значение координаты x по криволинейной области).

Эквивалентная система уравнений состоит из

$$F_1 = (U_1^2 - U_1^*)|_{x_1=x_1^*} = 0,$$

$$F_2 = (\sigma_{11}^1 - \sigma_{11}^*)|_{x_1=0} = 0,$$

$$F_3 = 0.$$

Здесь U_1^* – известные из граничных условий перемещения U_1 на границе области ($x_1 = x_1^*$); σ_{11}^* – известные из граничных условий напряжения σ_{11} на границе области ($x_1 = 0$). Причём уравнений $F_1 = 0$ столько, сколько неизвестных $\sigma_{11}|_{x_1=x_1^*}$, а уравнений $F_2 = 0$ столько, сколько неизвестных $U_1|_{x_1=0}$.

Для решения уравнения теплопроводности используется численный метод, разработанный в работе [1]. В соответствии с данным методом для каждого внутреннего k -го элемента записывается система теплопроводности в разностном виде и строится итерационная процедура, которая с учётом того, что тепловой поток по x_3 равен нулю, представляется итерационной формулой:

$$\theta_k = \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{22}\theta_2^+ + t_{21}\theta_2^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21}}, \quad (11)$$

где $t_{12} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^2 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}$; $t_{11} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{21} + S_{21}^-} F_1^1 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}$; $t_{22} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^+)}{S_{12} + S_{12}^+} F_2^2 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}$; $t_{21} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^-)}{S_{12} + S_{12}^-} \times$
 $\times F_2^1 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}$; $F_i^j = S_{ik}^j \cdot S_{ip}^j$; $i \neq k \neq p$; $i, k, p = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$; $V_k = \frac{S_{13} S_{12} (S_{21} + S_{31})}{16}$.

Здесь θ_k^* – средняя температура в k -м элементе в начале временного шага $\Delta\tau$; $\lambda_k, \theta_k, C_k, \gamma_k$ – соответственно средние значения коэффициента теплопроводности, температуры, теплоёмкости и удельный вес в k -м элементе в конце временного шага $\Delta\tau$; λ_i^-, θ_i^- ($i=1,2$) – соответственно коэффициент теплопроводности и температуры в элементе, следующем за элементом k по координате x_i в отрицательную сторону; λ_i^+, θ_i^+ – аналогичные параметры в положительном направлении x_i . $S_{21}^- = S_{21}^{1-} + S_{22}^{2-}$; $S_{21}^+ = S_{21}^{1+} + S_{22}^{2+}$; S_{ij}^{1+} ($i \neq j; i, j = 1, 2$) – длина дуги S_{ij}^1 -элемента, следующего за элементом k в положительном направлении по координате x_j ; S_{ij}^{1-} – то же, но в отрицательном по x_j ; θ_i^+ – температура в элементе, следующем за элементом k в направлении x_i ; θ_i^- – то же, но в отрицательном направлении x_i .

Общий алгоритм моделирования НДС монослойных электрофоретических форм [2; 3]:

1. Время охлаждения τ^* разбивается на конечное число шагов: $\tau^* = \sum \Delta\tau_n$; n – номер временного шага.
2. Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов.
3. Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующим рассматриваемую область, и константы физико-механических свойств материалов.
4. Вычисляются длины дуг элементов S_{ik}^j ($i, k = 1, 2; i \neq k; j = 1, 2$).
5. Определяется поле температур на временном шаге $\Delta\tau_n$ численным решением уравнения теплопроводности с использованием итерационной формулы (11) при наличии начальных и граничных условий на данном временном шаге.
6. Если температура в области (I) у поверхности S_2 $\theta|_{S_2} \leq \theta_{II}^*$, то вычисляется толщина закристаллизовавшейся корочки Δ_n по формуле (4). Если $\theta|_{S_2} > \theta_{II}^*$, то выполняется операция по пункту 7.
7. Решается система уравнений (2) с учётом разностных аналогов (6), (7), (9) и разработанной методики, описанной в работе [1]. Определяются поля напряжений σ_{ij} и перемещений U_i ($i, j = 1, 2$).
8. Производится шаг времени. Если $\sum \Delta\tau_n < \tau^*$, то выполняется операция по пункту 4. Если $\sum \Delta\tau_n = \tau^*$ – процесс вычисления закончен.

При моделировании толщину ОФ условно разбили на четыре равных слоя и в дальнейшем изменение напряжений и деформаций контролировали на границах этих слоёв. С помощью математической модели исследовались два режима нагрева и прокаливания: 1) нагрев ОФ при помещении её в разогретую до температуры 800 °С печь; 2) нагрев ОФ вместе с печью со скоростью 50 °С/мин [2].

Сопоставляя данные о градиентах температур между условными слоями ОФ и расчётное распределение напряжений в слоях формы, было замечено, что максимальные напряжения в форме возникают не во время максимального градиента температур, а несколько позже. Достижение максимума напряжений происходит при температурах, соответствующих температурам фазового перехода кварца.

При моделировании плавного нагрева электрофоретической ОФ были получены расчётные распределения напряжений в электрофоретической ОФ, которые изменяются практически с той же закономерностью, что и напряжения в ОФ, нагреваемой в горячей печи. Отличия заключаются лишь в величинах полученных напряжений.

Так, при нагреве ОФ в горячей печи расчётные максимальные напряжения в ОФ значительно выше, чем максимальные напряжения в ОФ, нагреваемой совместно с печью с заданной скоростью.



Анализ полученных расчётных данных об НДС электрофоретических ОФ во время прокаливания показал, что основными факторами, влияющими на трещинообразование электрофоретических ОФ во время их нагрева и прокали, являются скорость нагрева ОФ и фазовое расширение кварцевой основы оболочки.

Также было установлено, что после заливки формы металлом напряжения во всех условных слоях ОФ сжимающие. В прилегающих к отливке слоям сжимающие напряжения в первый момент времени резко возрастают и также резко исчезают за счёт плавления связующего. По мере прогрева ОФ до температур свыше 800 °С напряжения, возникшие в ней, релаксируются за счёт перехода разогретых слоёв формы в пластичное состояние.

Напряжения, возникающие в слоях холодных ОФ, после заливки жидким металлом значительно выше по величине таких же напряжений, возникающих при заливке в горячую форму. Высокие напряжения в ОФ, появляющиеся при их заливке жидким металлом, обусловлены возникающим значительным перепадом температур по толщине ОФ, а также возникающим при температуре 600 °С фазовым расширением кварцевой основы ОФ [2; 3].

Выводы

На основе уравнений теплопроводности и механики сплошных сред с использованием численного метода построена математическая модель НДС монослойной электрофоретической оболочковой формы, которая позволяет рассчитывать температурные поля и напряжённо-деформированное состояние оболочковой формы на стадии прокаливания и заливки её жидким металлом.

В результате анализа расчётных данных установлено, что на НДС электрофоретических ОФ во время прокали большое влияние оказывает скорость нагрева ОФ и, как следствие, перепад температур по толщине формы. Установлено, что наибольшая вероятность образования трещин в электрофоретических формах возникает в средних слоях холодных форм, заливаемых жидким металлом за счёт высоких напряжений, вызванных фазовым расширением кварца при температуре около 600 °С.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокоев, Б. Г. Каплунов, А. В. Песков, А. В. Баков. – М.: Наука, 2008. – 176 с.
2. Евстигнеев, А. И. Математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния оболочковых форм при литье по выплавляемым моделям / А. И. Евстигнеев, В. И. Одинокоев, В. В. Петров, Э. А. Дмитриев. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 130 с.
3. Евстигнеев, А. И. Расчёт оболочковых форм, полученных методом электрофореза / А. И. Евстигнеев, В. И. Одинокоев, Э. А. Дмитриев // Литейное производство. – 2009. – № 1 – С. 29-33.
4. Theoretical prediction of crack formation in axisymmetric multilayer shell molds. Materials Science Forum / A. I. Evstigneev, V. I. Odinokov, A. V. Sviridov, E. A. Dmitriev, V. V. Petrov. – Vol. 857. – P. 573-577.
5. Mathematical modelling of stress-strain state of multilayer shell molds / A. I. Evstigneev, V. I. Odinokov, A. V. Sviridov, E. A. Dmitriev, V. V. Petrov // Materials Science Forum. – Vol. 857. – P. 565-572.

Жилин С. Г.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ УПАКОВКИ КОМПОНЕНТОВ ПОРОШКОВОГО ТЕЛА НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕССОВКИ ПРИ УПЛОТНЕНИИ

Жилин С. Г.

S. G. Zhilin

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ УПАКОВКИ КОМПОНЕНТОВ ПОРОШКОВОГО ТЕЛА НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕССОВКИ ПРИ УПЛОТНЕНИИ

EFFECT OF POWDER COMPONENT INITIAL PACKAGING ON STRESS-DEFORMED STATE OF PRESSING WHEN SEALING

Жилин Сергей Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: sergeyzhilin1@rambler.ru.

Mr. Sergey G. Zhilin – PhD in Engineering, Associate professor, Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: sergeyzhilin1@rambler.ru.

Аннотация. Снизить затраты на механообработку можно при использовании технологии изготовления выплавляемых моделей прессованием порошков модельных композиций. При прессовании возможен упругий возврат уплотнённого материала, на величину которого влияют начальная плотность упаковки и скорость уплотнения. Для определения влияния начальной упаковки компонентов порошкового тела на напряжённно-деформированное состояние прессовки изготовлены шаровидные элементы, имитирующие компоненты порошковых модельных композиций. Элементы подвергались одноосному уплотнению при различной скорости до достижения стадии пластической деформации.

Summary. Reduction of the mechanic engineering cost can be realized using the technology of making melted models by pressing powders of model compositions. When pressing, the compacted material can be resiliently returned, the initial packing density and the compaction rate affect the value of which. To determine the effect of the initial packing of the powder components on the stress-strain state of the compact, spherical elements simulating the components of the powder model compositions are made. Elements were subjected to uniaxial compaction at different speeds until the stage of plastic deformation.

Ключевые слова: прессование, напряжённно-деформированное состояние, пористость, шаровидные элементы, воскообразный материал, удаляемая модель, размерно-геометрическая точность, порошок, пресс-матрица, начальная упаковка компонентов, гетерогенные материалы.

Key words: pressing, stress-strain state, porosity, spherical elements, waxy material, removable model, dimensional-geometric accuracy, powder, press matrix, initial packing of components, heterogeneous materials.

УДК 621.74.045:53.09

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Введение

Последовательность операций при получении металлоизделий из отливок в литьё по выплавляемым моделям (ЛВМ) [1] состоит в изготовлении выплавляемых моделей, формировании на них керамических оболочек, прокатке и заливке оболочек, затвердевании расплава металла и механической обработке литой заготовки. Значительное число операций и большая номенклатура материалов определяют актуальность поиска вариантов сокращения затрат на механическую обработку литых заготовок при получении отливок повышенной размерно-геометрической точности. Объём операций, связанных с механической обработкой, может определяться необходимостью устранения неметаллических включений, исправления нарушений геометрии отливки или её



доведением до требований точности. Повысить точность отливок позволяет модернизация процесса получения выплавляемых моделей прессованием воскообразных модельных композиций, при котором материал требуется деформировать до значений плотности на 10 % меньших, чем плотность этого материала, получаемая в ходе естественного затвердевания расплава. Такой приём позволяет устранить усадочные явления и поверхностные неровности, снизить напряжения, возникающие в керамической форме в процессе выплавления модельной массы, а значит сократить затраты на механическую обработку литых заготовок [2; 3]. Достижение значений пористости моделей больших, чем 10 % без потери прочностных и эксплуатационных характеристик возможно при использовании модельных композиций с растворимыми компонентами [4]. Так как эти включения представляют собой растворимые в воде кристаллогидраты, физико-механические свойства которых значительно выше, чем у воскообразного материала основы прессованной модели, то при прессовании последней деформациям подвергается только воскообразный компонент. Терминологически вернее такие модели называть не выплавляемыми, а удаляемыми, так как процесс их удаления происходит в две стадии: удаление растворимого наполнителя и выплавление воскообразного материала. При получении моделей прессованием возможно появление дефектов, связанных с упругим возвратом уплотнённого материала, возникающим после снятия нагрузки [5; 6; 7]. Снижение размерно-геометрической точности моделей может являться результатом образования областей неравномерного уплотнения с различной величиной упругого отклика. Периферийные участки прессовки более подвержены обратной упругой деформации. Таким образом, получение удаляемых моделей с равномерным распределением свойств – технологически важная задача, достижимая при определённых режимах прессования [8; 9].

На выбор режима деформирования материала модели и, следовательно, формирование структуры прессовки оказывает влияние начальная упаковка модельного материала в пресс-матрице, фракционный и гранулометрический составы, а также равномерность распределения его компонентов. Согласно идеализированной кривой уплотнения смеси процесс характеризуется тремя основными стадиями [10]: структурной деформацией уплотняемой системы, ростом давления прессования без увеличения плотности прессовки и, наконец, пластической деформацией, охватывающей весь объём каждой частицы уплотняемого порошкового тела при отсутствии смещения межчастичных контактов. Воскообразные материалы характеризуются относительно высоким пределом текучести, начальная и конечная стадии уплотнения резко разграничены, а их прессование сопровождается взаимным наложением одновременно протекающих стадий порошкового тела.

Важным для достижения равномерного распределения свойств при уплотнении воскообразной основы удаляемой модели является перемещение частиц на первых двух стадиях [10; 11], так как именно распределение элементов, зафиксированных в уплотняемом теле перед началом пластической деформации, во многом определяет конечные свойства прессовки. Оценка параметров процесса уплотнения при использовании хлопьевидных фракций неправильной формы представляется затруднительной ввиду склонности такой формы материала к образованию арок. Для устранения этого эффекта целесообразно использовать шаровидную форму компонентов порошкового тела. Это позволит приблизить процесс уплотнения к идеальному и установить закономерность влияния скорости перемещения пресс-пуансона при прессовании материала до напряжённо-деформированного состояния прессовок. Регулированием скорости перемещения пресс-пуансона при уплотнении воскообразного материала прессовок возможно достижение меньшей анизотропии, что позволит прогнозировать конечные размеры формируемого изделия [12].

Актуальность эксперимента определяется необходимостью изучения влияния параметров уплотнения на формирование свойств прессовки и имеет потенциал использования в машиностроении при получении прессовок, конструировании оснастки.

Цели и задачи исследования

Целью работы является изучение влияния начальной упаковки компонентов порошкового тела на напряжённо-деформированное состояние прессовки при уплотнении для определения условий равномерного распределения напряжений в её структуре.

Для реализации поставленной цели решались следующие задачи:

- определение влияния упаковки однокомпонентного модельного материала и скорости перемещения пресс-пуансона на характеристики напряжённно-деформированного состояния прессовки в процессе её уплотнения до упаковки, соответствующей завершению стадии смещения межчастичных контактов, когда пластическая деформация охватывает весь объём прессовки;
- определение влияния скорости перемещения пресс-пуансона при уплотнении гетерогенного модельного материала с различным содержанием воскообразных и имитирующих растворимую добавку компонентов на характеристики напряжённно-деформированного состояния прессовки в процессе её уплотнения до упаковки, соответствующей завершению стадии смещения межчастичных контактов, когда пластическая деформация охватывает весь объём прессовки;
- определение наиболее благоприятного варианта начального размещения компонентов модельного и режима его уплотнения состава в пресс-форме, при котором достигается равномерное распределение свойств в прессовке перед началом пластической деформации.

Методы и материалы

При получении пористых удаляемых моделей прессованием используют композиции материалов, состоящих из равных фракций порошков, полученных рассевом. Неправильная ломаная форма частиц порошков таких материалов, как правило, характеризуется хлопьевидностью и разнотолщинностью [13]. Адекватно характеризовать распределение свойств в различных участках будущей прессовки, а также на стадиях уплотнения материала представляется затруднительным. Форма частиц модельного материала обуславливает возможность их самопроизвольного распределения в полости пресс-матрицы и влияет на степень её заполнения. С целью снижения угла естественного откоса материала при заполнении пресс-матрицы, а также достижения его равномерного распределения в массивных частях и поднутрениях пресс-матрицы предпочтительным является использование гранул модельных составов. Реализация поставленной цели осуществлялась в серии натуральных экспериментов с использованием специализированной пресс-формы с внутренней поверхностью, образующей вертикально-ориентированный параллелепипед с размерами основания 10×50 мм и высотой 90 мм. В пресс-форме осуществляется одностороннее прессование шаровидных элементов диаметром $\varnothing = 10$ мм, размещённых в один слой по высоте, как показано на рис. 1.

Для проведения эксперимента применяли материалы различной плотности. Технологичность и эксплуатационная пригодность выплавляемых моделей в производственных условиях достигаются при использовании многокомпонентных модельных составов, например ПС 50/50 с равным содержанием парафина и стеарина. Для сокращения погрешности эксперимента в качестве воскообразного компонента выбран материал 1-й группы из классификации модельных составов [1] – парафин марки Т1, соответствующий ГОСТ 23683-89 «Парафины нефтяные твёрдые. Технические условия» [14]. К свойствам материала Т1, влияющим на параметры процесса его уплотнения, относится плотность, определяемая после свободной заливки [15]. С учётом распределённой пористости плотность Т1 составляет 0,86 г/см³. Так как при деформировании и уплотнении повышается температура материала, то изменяются его физико-механические характеристики, что определяет важность учёта температуры при описании картины деформации. Значение температуры плавления Т1, определённое с помощью дифференциально-термического анализатора Shimadzu DTG-60Н, составляет 60 °С.

Поскольку предел прочности на сжатие растворимого компонента комбинированной удаляемой модели значительно выше прочности воскообразного, то в качестве материала, имитирующего растворимый компонент гетерогенной смеси, можно использовать сталь любой марки, например Ст45. Свойства стали 45 соответствуют ГОСТ 1050-2013 «Металлопродукция из нелегированных конструкционных качественных и специальных сталей. Общие технические условия» (модуль Юнга: 210 ГПа, плотность 7810 кг/м³) [16]. Принимаем, что деформация материала Ст45, используемого в эксперименте, близка к 0 %, а стальные шарообразные элементы служат только для передачи энергии прессования воскообразному компоненту смеси. При анализе экспе-

риментальных данных деформацией и изменениями физико-механических характеристик материала, имитирующего растворимый компонент, пренебрегаем.

Основная часть

В ходе эксперимента исследовалась зависимость деформации материала от нагрузки и особенностей расположения компонентов в форме. Визуальная оценка картины деформации компонентов модельного материала необходима для фиксации момента начала пластификации всего объёма материала. Такая оценка становится возможной при использовании прозрачной стенки в пресс-форме, выполненной с жёсткостью, достаточной для обеспечения сопротивления нагрузке, возникающей на этапе начала пластической деформации всего объёма уплотняемого тела. Деформации после такого нагружения становятся необратимыми. Эксперимент заключался в помещении шаровидных элементов в формообразующую полость пресс-матрицы с имитацией различных вариантов их упаковки с последующим уплотнением. Уплотнение в течение каждого из серии экспериментов, проводимых при помощи тестовой машины AG-X plus Shimadzu, осуществляли с постоянной скоростью перемещения пресс-пуансона. Эксперимент состоял из серий с двумя скоростями перемещения пресс-пуансона – 0,5 мм/с и 3 мм/с.

На рис. 1. представлены варианты вертикального однослойного размещения сферических элементов, имитирующих начальное распределение компонентов модельного состава в пресс-форме. Начальные условия уплотнения шарообразных элементов представлены в табл. 1. При этом варианты 4 и 5 размещения шарообразных элементов в пресс-форме имитировали состояние прессовки, приближённое к условиям 20%-го и 50%-го содержания в порошковом теле упругих элементов.

Из анализа данных табл. 1 и рис. 1 видно, что число контактов взаимодействующих между собой воскообразных элементов определяет плотность их упаковки и, соответственно, определит динамику уплотнения всей прессовки. Принимаем, что при уплотнении деформируются только воскообразные элементы. При определении доли начального объёма, занимаемого ими, из объёма внутренней полости пресс-матрицы следует вычесть сумму объёма стальных шаров (для вариантов 4 и 5). Наиболее плотное распределение достигается при вариантах упаковки 4 и 5.

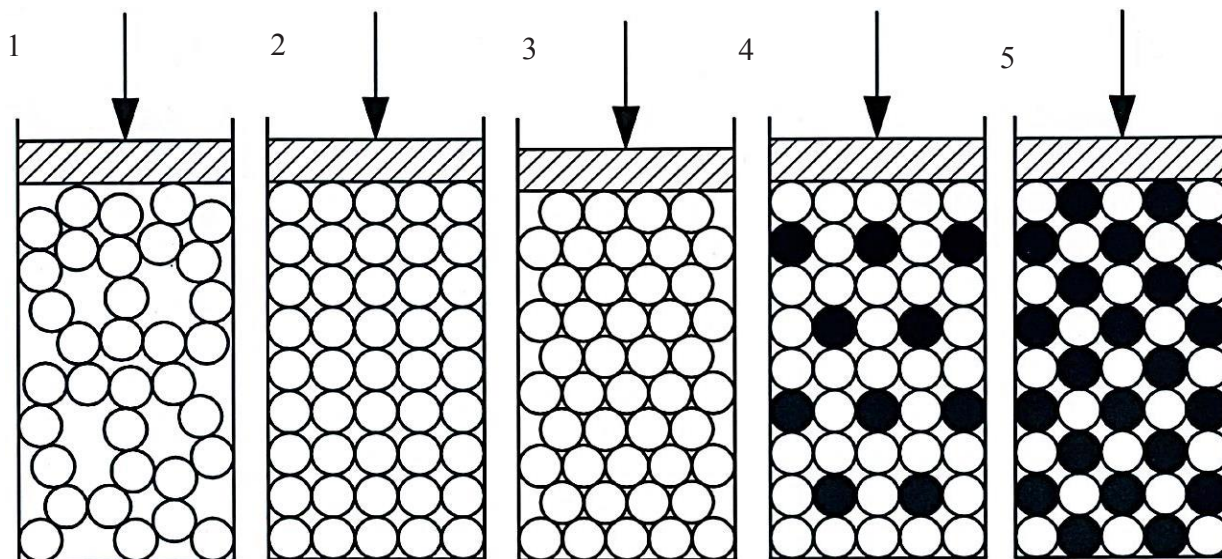


Рис. 1. Варианты размещения шарообразных элементов в пресс-форме:

- 1 – свободная засыпка; 2 – кубическая упаковка; 3 – гексагональная упаковка;
4 – кубическая с 20 % упругих элементов; 5 – кубическая с 50 % упругих элементов

Таблица 1

Начальные условия формирования прессовок

Вариант размещения элементов	1	2	3	4	5
Внутренний объём пресс-матрицы, см ³	45	45	43,75	40	33,5
Насыпная плотность воскообразного компонента, кг/м ³	340	445	460	445	445
Число воскообразных элементов в пресс-матрице, шт.	34	45	45	35/45*	23/45*
Доля объёма воскообразных компонентов, %	40	52	54	59	65

*Числа 35 и 23 – числа воскообразных элементов из 45 всех шаровидных элементов

На рис. 2 представлены экспериментальные результаты по определению влияния скорости перемещения пресс-пуансона на динамику изменения напряжения от деформации при различных вариантах начальной упаковки компонентов. Из рис. 2 видно, что при уплотнении прессовок со всеми вариантами начальной упаковки напряжения при 30 % деформации не превышают 0,5 МПа. В ходе эксперимента [2] установлено, что разрушение гексагонально упакованных элементов начинается при значениях деформации, превышающих 50 %. Превышение скорости перемещения пресс-пуансона более 3 мм/с для использованных в работе однородных воскообразных материалов приводит к получению прессовки с неравномерным упругим откликом по её периферии ввиду «фронта» уплотнения. Как видно из рис. 2, при повышении плотности начальной упаковки за счёт внесения в систему несжимаемых элементов различия кривых, характеризующих зависимости напряжений от деформаций, несущественны. Технологически оптимальным представляется вариант распределения элементов, при котором удельная плотность в любом участке прессовки одинакова по завершении 2-й стадии уплотнения. При увеличении скорости прессования происходит дестабилизация распределения плотности в уплотняющейся гетерогенной системе в результате фронтального характера уплотнения.

Как видно из табл. 1, внесение упругих компонентов позволяет увеличить долю воскообразной части в начальной упаковке за счёт повышения площади их контакта. Видно, что при наиболее плотной упаковке воскообразных элементов, характерной для варианта 5, пластическая стадия деформирования наступает уже при сокращении высоты прессовки на 50 %, а рост напряжения в прессовке носит асимптотический характер.

На рис. 2 символами $R_{0,5}^2$ и R_3^2 отмечены значения величин достоверности аппроксимации полиномиальных зависимостей, построенных по результатам реального эксперимента, полученных при скорости перемещения пресс-пуансона 0,5 мм/с и 3 мм/с соответственно. Такие значения величин достоверности позволяют упростить описание результатов экспериментов по сглаженным аппроксимированным зависимостям. В связи с этим данные, представленные в табл. 2, отражают средние значения напряжений, полученных с аппроксимированных кривых при изменении значений деформации уплотняемой системы с шагом 10 %.

Таблица 2

Зависимость напряжения от деформации при различных вариантах начальной упаковки деформируемой системы

Деформация, %	Напряжение ($\sigma_{0,5}/\sigma_3$), МПа						
	10	20	30	40	50	60	
Варианты размещения элементов в пресс-форме	1	0,05/0,15	0,38/0,42	0,46/0,59	0,53/0,76	0,71/1,15	0,97/1,75
	2	0,29/0,29	0,5/0,54	0,64/0,68	0,65/0,78	1,15/1,17	1,6/1,6
	3	0,37/0,43	0,48/0,58	0,55/0,67	0,66/0,82	0,96/1,17	1,43/1,72
	4	0,26/0,28	0,36/0,38	0,47/0,48	0,66/0,66	0,9/1,0	-/-
	5	0,33/0,28	0,33/0,41	0,46/0,53	0,39/0,75	1,6/1,5	-/-

Примечание – $\sigma_{0,5}/\sigma_3$ – напряжения, полученные при скорости перемещения пресс-пуансона, равной 0,5 мм/с и 3 мм/с соответственно

Из анализа данных табл. 2 видно, что максимальные напряжения, характерные для полностью пластической стадии прессования, достигаются для разных вариантов начальной упаковки воскообразных элементов уплотняемой системы при различных значениях степени их деформации. Весь объём прессовки, состоящей из воскообразных элементов, охватывается пластической деформацией по достижении 60 %, а значения напряжений для этих случаев выше, чем для вариантов упаковки элементов 4 и 5. Чем выше начальная плотность воскообразного компонента в модельной композиции, тем меньшее влияние оказывает скорость уплотнения на напряжённо-деформированное состояние прессовки.

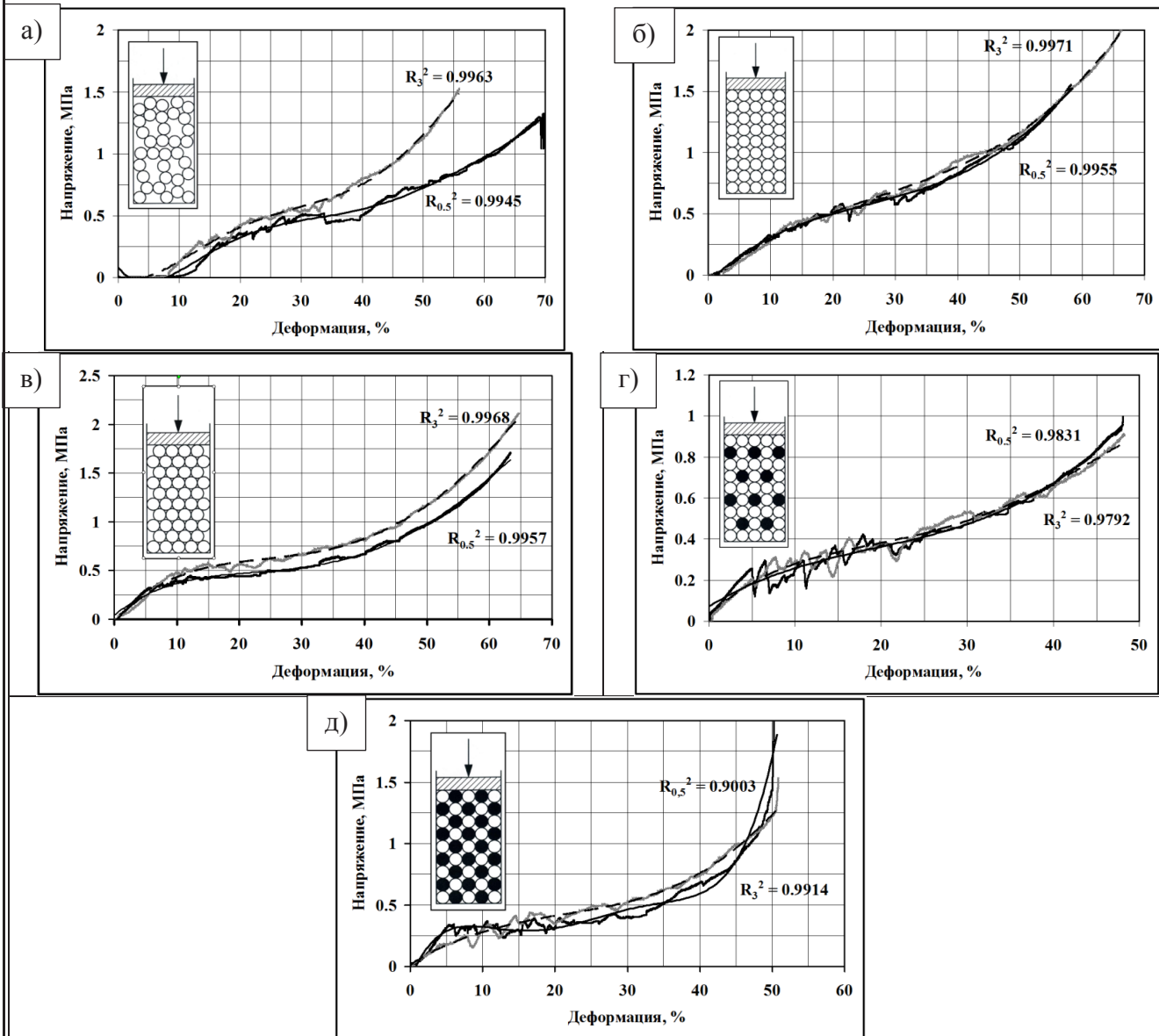


Рис. 2. Зависимости напряжения от деформации: а – свободная упаковка; б – кубическая; в – гексагональная; г – кубическая с 20 % упругих элементов; д – с 50 % упругих элементов

Выводы

Таким образом, для формирования удаляемой модели прессованием воскообразных компонентов величина напряжений регулируется скоростью уплотнения и начальной упаковкой материала в пресс-матрице, которая для однокомпонентных систем характеризуется насыпной плотностью. Чем меньше насыпная начальная плотность однокомпонентного материала, тем большее расхождение значений напряжений при деформировании прессовок с увеличением скорости прессования.

Для многокомпонентных систем насыпная плотность материала для прогнозирования напряжений конечной прессовки представляется не столь существенной, так как на её величину влияют физико-механические характеристики упругих компонентов. Растворимые материалы более стойки к деформациям, чем воскообразный материал основы, и служат для передачи нагрузки. Наличие в модельной массе более 50 % «упругих» компонентов ведёт к неравномерному увеличению напряжений при деформации, большей величине упругого отклика прессовки ввиду сокращения в ней пространства для релаксации уплотнённого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литьё по выплавляемым моделям / В. Ф. Гаранин, В. Н. Иванов, С. А. Казеннов [и др.]; под. ред. В. А. Озерова. – М.: Машиностроение, 1994. – 448 с.
2. Жилин, С. Г. Особенности формирования пористой структуры прессовок из полимерного дисперсного материала / О. Н. Комаров, А. А. Соснин, Д. А. Потянихин // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2016. – № IV-1(28). – С. 26-338.
3. Патент 2632051 Российская Федерация, МПК⁷ В22С7/02. Способ изготовления выплавляемых моделей / Жилин С. Г., Комаров О. Н., Соснин А. А., Панченко Г. Л.; заявитель и патентообладатель Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук; заявл. 13.05.2016; опубл. 02.10.2017. Бюл. № 28. – 3 с.
4. Жилин, С. Г. Управление структурой и свойствами пористых комбинированных удаляемых моделей: дис. ...канд. техн. наук: 05.16.04: защищена 16.05.2002 / Жилин Сергей Геннадьевич. – Комсомольск-на-Амуре, 2002. – 218 с. – Библиогр.: С. 92-104.
5. Буренин, А. А. Упругий отклик среды при развитии, остановке и повторном вязкопластическом течении, включая мгновенную разгрузку // Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4(5). – С. 2043-2044.
6. Рыбин, В. В. Большие пластические деформации и разрушение металлов / В. В. Рыбин. – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.
7. Винокуров, Г. Г. Статистическое моделирование корреляции локальной плотности макроструктуры при одностороннем прессовании порошковых материалов / Г. Г. Винокуров, О. Н. Попов // Известия Самарского научного центра РАН, 2011. – Т. 13. (№ 1–3). – С. 553-557.
8. Рожкова, Т. В. Исследование влияния межчастичных контактов на процесс предварительного прессования порошкового материала / Т. В. Рожкова, В. Н. Кусков, Н. И. Смолин // Агропродовольственная политика России. – 2017. – № 11(71). – С. 140-144.
9. Жилин, С. Г. Получение отливок повышенной размерной точности по комбинированным литейным моделям из алюмотермитных и воскообразных смесей / С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, А. А. Соснин, В. В. Предеин // Заготовительные производства в машиностроении. – 2016. – № 11. – С. 6-11.
10. Медведев, Я. И. Технологические испытания формовочных материалов / Я. И. Медведев, И. В. Валисовский. – М.: Машиностроение, 1973. – 312 с.
11. Орлов, Г. М. Текучесть формовочных смесей / Г. М. Орлов // Теория формовки. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 211 с.
12. Жилин, С. Г. Моделирование процессов обработки материалов давлением на основе оценки напряжённо-деформированного состояния прессовок из полимерных композиций с использованием метода конечных элементов / С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, А. А. Соснин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2017. – Т. 19. – № 2. – С. 48-66.
13. Жилин, С. Г. Экспериментальное определение параметров регрессионной зависимости Кольрауша для пористых прессовок из воскообразных порошковых композиций / С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, Д. А. Потянихин, А. А. Соснин // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2018. – № 2(74). – С. 9.
14. ГОСТ 23683-89. Парафины нефтяные твёрдые. Технические условия. – Введ. 1991-01-01. – М.: Стандартинформ, 2007. – 13 с.
15. Жилин, С. Г. Определение параметров логарифмического уравнения прессования для описания процесса одноосного уплотнения порошкового тела из полимерного материала / С. Г. Жилин, О. Н. Комаров, Д. А. Потянихин, А. А. Соснин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2016. – Т. 18. – № 4. – С. 48-59.
16. ГОСТ 1050-2013. Металлопродукция из нелегированных конструкционных качественных и специальных сталей. Общие технические условия. – Введ. 2015-01-01. – М.: Стандартинформ, 2014. – 31 с.



Россихин Ю. А., Шитикова М. В.

Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova

АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В ОБОЛОЧКАХ ИЗ ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

NON-STATIONARY WAVE ANALYSIS IN SHELLS FROM COSSERAT PSEUDO-CONTINUUM

Россихин Юрий Алексеевич – доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор Воронежского государственного технического университета, научный центр по фундаментальным исследованиям (Россия, Воронеж). E-mail: yar@vgasu.vrn.ru.

Mr. Yuri A. Rossikhin – Doctor of Physics and Mathematics, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Voronezh State Technical University, Research Center for Basic Research (Russia, Voronezh). E-mail: yar@vgasu.vrn.ru.

Шитикова Марина Вячеславовна – доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного технического университета, научный центр по фундаментальным исследованиям (Россия, Воронеж). E-mail: mvs@vgasu.vrn.ru.

Ms. Marina V. Shitikova – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State Technical University, Research Center for Basic Research (Russia, Voronezh). E-mail: mvs@vgasu.vrn.ru.

Аннотация. Изучены условия существования и закономерности распространения существенных нестационарных волн в упругих оболочках с учётом инерции вращений и деформаций поперечного сдвига. Уравнения движения оболочки получены согласно трёхмерной модели, свободной от гипотезы отсутствия моментных напряжений (континуума Коссера), путём направленного использования лучевого подхода к теории условий совместности разрывов. При следовании динамическим условиям совместности вычислены скорости движений возможных поверхностей сильного разрыва и указаны их свойства.

Summary. Conditions for the existence and regularity of the substantial nonstationary waves distribution in elastic shells are studied taking into account the rotation inertia and deformations of the transverse shear. The equations of shell motion are obtained according to the three-dimensional model of the absence of the moment stresses (the Cosserat continuum) free from the hypothesis by the directed use of the ray approach to the theory of compatibility conditions for discontinuities. Following dynamic compatibility conditions, the velocities of the motions of possible surfaces of a strong discontinuity are calculated and their properties are indicated.

Ключевые слова: упругость, моментные напряжения, оболочки, условие совместности разрывов, лучевой метод, ударные волны.

Key words: elasticity, moment stresses, shells, the compatibility condition of discontinuities, the ray method, shock waves.

УДК 539.3

Работа выполнена по государственному заданию Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 9.994.2017/4.6.

Введение

Уже прошло 100 лет с тех пор, как С. П. Тимошенко в своей «пионерской» работе [4] обобщил модель балки Бернулли – Эйлера, введя в рассмотрение две независимые функции: перемещение центра тяжести поперечного сечения и вращение поперечного сечения относительно продольной центральной оси сечения.

Для чего учитывалась инерция вращения и деформация поперечного сдвига? Для того чтобы тонкие тела воспринимали нестационарные поперечные нагрузки, которые приводят к зарождению и рассмотрению нестационарных поперечных волн сдвига [1]. Классические уравнения, которые описывают динамическое поведение тонких тел, не допускают распространение таких волн. Но нестационарные волны распространяются в виде поверхностей сильного или слабого разрывов. Поэтому естественно для решения таких задач использовать теорию разрывов, основанную на лучевых рядах и условиях совместности, учитывающих поперечную деформацию тонких тел. При этом нужно исходить из трёхмерных уравнений, описывающих поведение того материала, из которого состоит тонкое тело.

Этот подход является новым и не менее «пионерским», чем подход С. П. Тимошенко, но, в отличие от последнего, он не содержит таких новых констант материала, как коэффициент сдвига K , который к тому же не определяется экспериментально.

Данный подход разрабатывался авторами с 2007 года, и за десять прошедших лет удалось создать стройную теорию, описывающую динамическое поведение таких тонких тел, как упругие пластинки и оболочки [5], упругие балки сплошного поперечного сечения [6], упругие тонкостенные пространственно изогнутые балки открытого профиля [7], термоупругие тонкостенные балки [8; 9] и тонкостенные балки из псевдоконтинуума Коссера [10; 11].

В данной работе созданная теория распространяется на оболочки из псевдоконтинуума Коссера.

Постановка задачи и определяющие уравнения

Будем исходить из системы уравнений, описывающих динамическое поведение трёхмерного псевдоконтинуума Коссера [2; 12]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \mu_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \alpha(u_{i,j} - u_{j,i} - 2 \epsilon_{kij} \psi_k), \quad (1)$$

$$\mu_{ij} = \beta \psi_{k,k} \delta_{ij} + \gamma(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}) + \varepsilon(\psi_{i,j} - \psi_{j,i}), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \dot{v}_i, \quad \mu_{ij,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = J \dot{\omega}_i, \quad (3)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений; μ_{ij} – тензор моментных напряжений; ϵ_{kij} – тензор Леви-Чивита; u_i – вектор перемещений; $v_i = \dot{u}_i$ – вектор скоростей (точка означает производную по времени t , а индекс, стоящий после запятой, означает производную по соответствующей координате); ψ_i – вектор углов поворота; $\omega_i = \dot{\phi}_i$ – вектор угловой скорости; ρ – плотность; δ_{ij} – символ Кронекера; J – момент инерции; λ , μ , α , β , γ и ε – константы материала; x_i ($i=1,2,3$) – декартовы координаты.

Предположим, что в оболочке из псевдоконтинуума Коссера распространяется нестационарная волна (поверхность сильного разрыва) со скоростью G . Наряду с декартовыми координатами введём лучевые координаты s_1 , s_2 , ξ : s_1 – координата, направленная вдоль луча; s_2 – координата, направленная вдоль линии L , образованной пересечением фронта волны со срединной поверхностью оболочки, и ξ направлена вдоль нормали к срединной поверхности. Предполагается, что волна сильного разрыва в процессе своего распространения всё время остаётся перпендикулярной срединной поверхности оболочки.

Кроме лучевых координат введём в рассмотрение единичные векторы, связанные с лучевыми линиями: касательный вектор к лучевой линии $\lambda\{\lambda_i\}$, векторы главной нормали $\xi\{\xi_i\}$ и би-нормали $\tau\{\tau_i\}$ к лучевой линии.

Записывая каждое уравнение системы (1)–(3) по обе стороны от волновой поверхности и беря разность соответствующих уравнений спереди и сзади от волновой поверхности Σ , получим

$$[\sigma_{ij}] = \lambda[u_{k,k}] \delta_{ij} + \mu([u_{i,j}] + [u_{j,i}]) + \alpha([u_{i,j}] - [u_{j,i}] - 2 \epsilon_{kij} [\psi_k]), \quad (4)$$

$$[\mu_{ij}] = \beta[\psi_{k,k}] \delta_{ij} + \gamma([\psi_{i,j}] + [\psi_{j,i}]) + \varepsilon([\psi_{i,j}] - [\psi_{j,i}]), \quad (5)$$

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho[\dot{v}_i], [\mu_{ij,j}] + \epsilon_{ijk} [\sigma_{jk}] = J[\dot{\omega}_i], \quad (6)$$

где $[Z] = Z^+ - Z^-$, а знаки «+» и «-» означают, что произвольная функция Z подсчитывается непосредственно перед и за волновой поверхностью Σ .

Будем интерпретировать волновую поверхность Σ как слой малой толщины δ , передний фронт которого приходит в некоторую точку M оболочки в момент времени t , а задний фронт приходит в ту же точку в момент времени $t + \Delta t$, где Δt мало. Используя условия совместности Адамара – Томаса [3] внутри этого слоя, получим

$$\sigma_{ij,j} = -G^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \lambda_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_1} \lambda_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_2} \tau_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi} \xi_j, \quad (7)$$

$$\mu_{ij,j} = -G^{-1} \dot{\mu}_{ij} \lambda_j + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial s_1} \lambda_j + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial s_2} \tau_j + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \xi} \xi_j. \quad (8)$$

Перепишем уравнения (3) и (4) внутри ударного слоя в виде

$$-G^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \lambda_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_1} \lambda_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_2} \tau_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi} \xi_j = \rho \dot{v}_i, \quad (9)$$

$$-G^{-1} \dot{\mu}_{ij} \lambda_j + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial s_1} \lambda_j + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial s_2} \tau_j + \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \xi} \xi_j = \rho \dot{\omega}_i. \quad (10)$$

Фиксируя в соотношениях (9) и (10) координаты s_1 , s_2 и ξ , затем интегрируя эти соотношения по времени от t до $t + \Delta t$ и устремляя Δt к нулю, приходим к динамическим условиям совместности:

$$[\sigma_{ij}] \lambda_j = -\rho G [v_i], [\mu_{ij}] \lambda_j = -J G [\omega_i]. \quad (11)$$

Записывая условия совместности для перемещений на фронте ударной волны и учитывая, что при отсутствии трещин $[u_i] = [\psi_i] = 0$, находим

$$[u_{i,j}] = -G^{-1} [v_i] \lambda_j + \left[\frac{\partial u_i \xi_j}{\partial \xi} \right], [\psi_{i,j}] = -G^{-1} [\omega_i] \lambda_j + \left[\frac{\partial \psi_i \xi_j}{\partial \xi} \right]. \quad (12)$$

Вторые члены в выражениях (12) оставлены для того, чтобы учесть в дальнейшем поперечную деформацию оболочки.

Учитывая соотношения (12), а также разложения величин по трём взаимно ортогональным единичным векторам λ_i , τ_i и ξ_i , получим

$$[v_i] = [\zeta] \lambda_i + [\theta] \tau_i + [\eta] \xi_i, [\omega_i] = [\omega_\lambda] \lambda_i + [\omega_\tau] \tau_i + [\omega_\xi] \xi_i. \quad (13)$$

Перепишем соотношения (4) и (5) в виде

$$[\sigma_{ij}] = -G^{-1}\lambda[\zeta]\delta_{ij} - G^{-1}\mu([v_i]\lambda_j + [v_j]\lambda_i) + G^{-1}\alpha([v_j]\lambda_i - [v_i]\lambda_j) + \\ + \mu \left(\left[\frac{\partial u_i \xi_j}{\partial \xi} \right] + \left[\frac{\partial u_j \xi_i}{\partial \xi} \right] \right) + \alpha \left(\left[\frac{\partial u_i \xi_j}{\partial \xi} \right] - \left[\frac{\partial u_j \xi_i}{\partial \xi} \right] \right) + \lambda [E_\xi] \delta_{ij}, \quad (14)$$

$$[\mu_{ij}] = -G^{-1}\beta[\omega_\lambda]\delta_{ij} - G^{-1}\gamma([\omega_i]\lambda_j + [\omega_j]\lambda_i) + G^{-1}\varepsilon([\omega_j]\lambda_i - [\omega_i]\lambda_j) + \\ + \gamma \left(\left[\frac{\partial \psi_i \xi_j}{\partial \xi} \right] + \left[\frac{\partial \psi_j \xi_i}{\partial \xi} \right] \right) + \varepsilon \left(\left[\frac{\partial \psi_i \xi_j}{\partial \xi} \right] - \left[\frac{\partial \psi_j \xi_i}{\partial \xi} \right] \right) + \beta [e_\xi] \delta_{ij}, \quad (15)$$

где

$$[E_\xi] = \left[\frac{\partial u_i \xi_i}{\partial \xi} \right], \quad [e_\xi] = \left[\frac{\partial \psi_i \xi_i}{\partial \xi} \right]. \quad (16)$$

Чтобы определить величины (16), характеризующие поперечные деформации оболочки, используем выражения

$$[\sigma_{ij}]\xi_i \xi_j = [\mu_{ij}]\xi_i \xi_j = 0, \quad (17)$$

соответствующие условию ненадавливания слоёв оболочки друг на друга при прохождении фронта ударной волны.

Учитывая соотношения (17) и умножая выражения (14) и (15) на $\xi_i \xi_j$, получим

$$[E_\xi] = \frac{\lambda}{G(\lambda + 2\mu)} [\zeta], \quad [e_\xi] = \frac{\beta}{G(\beta + 2\gamma)} [\omega_\lambda]. \quad (18)$$

Определение скоростей нестационарных волн

Теперь приступим к определению характера распространяющихся в оболочке ударных волн и их скоростей. Если умножим уравнения (14) и (15) на $\lambda_i \lambda_j$ и учтём формулу (18), в результате получим

$$[\sigma_{ij}]\lambda_i \lambda_j = -\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{G(\lambda + 2\mu)} [\zeta], \quad [\mu_{ij}]\lambda_i \lambda_j = -\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{G(\beta + 2\gamma)} [\omega_\lambda]. \quad (19)$$

Присоединим к соотношениям (19) соотношения (11), умноженные на λ_i . В результате получим

$$[\sigma_{ij}]\lambda_j \lambda_i = -\rho G [\zeta], \quad [\mu_{ij}]\lambda_j \lambda_i = -JG [\omega_\lambda]. \quad (20)$$

Из выражений (19), а также из соотношений (20) находим

$$\left\{ \rho G^2 - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\} [\zeta] = 0, \quad \left\{ JG^2 - \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \right\} [\omega_\lambda] = 0. \quad (21)$$

Из уравнений (19) следует, что на одной волне

$$G_1 = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)}}, \quad [\zeta] = [v_i]\lambda_i \neq 0, \quad (22)$$

а на другой волне

$$G_2 = \sqrt{\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{J(\beta + 2\gamma)}}, \quad [\omega_\lambda] = [\omega_i]\lambda_i \neq 0. \quad (23)$$

Первую волну – Σ_1 – будем называть квазипродольной, а вторую волну – Σ_2 – главной квази-изгибно-крутильной. Если бы у нас была изотропная упругая оболочка, то в этом случае

$$\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (24)$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона, и скорость G_1 определялась бы известной формулой для продольной волны, распространяющейся в упругих пластинках и оболочках,

а именно: $G_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}$.

Далее, умножая соотношения (14) и (15) на $\lambda_j \xi_i$ и предполагая, что

$$\left[\frac{\partial u_j \lambda_j}{\partial \xi} \right] = \left[\frac{\partial \psi_j \lambda_j}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (25)$$

имеем

$$[\sigma_{ij}] \lambda_j \xi_i = -G^{-1}(\mu + \alpha)[\eta], \quad [\mu_{ij}] \lambda_j \xi_i = -G^{-1}(\gamma + \varepsilon)[\omega_\xi]. \quad (26)$$

Присоединим к формулам (26) выражения

$$[\sigma_{ij}] \lambda_j \xi_i = -\rho G[\eta], \quad [\mu_{ij}] \lambda_j \xi_i = -JG[\omega_\xi], \quad (27)$$

которые получаются из динамических условий совместности (11) после умножения их на ξ_i . Решая совместно уравнения (26) и (27), находим

$$\{\rho G^2 - (\mu + \alpha)\}[\eta] = 0, \quad (28)$$

$$\{JG^2 - (\gamma + \varepsilon)\}[\omega_\xi] = 0, \quad (29)$$

откуда получаем две волны – Σ_3 и Σ_4 :

$$G_3 = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad [\eta] = [v_i]\xi_i \neq 0, \quad (30)$$

$$G_4 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, \quad [\omega_\xi] = [\omega_i]\lambda_i \neq 0. \quad (31)$$

Если провести аналогичную процедуру с уравнениями (14) и (15), умножая их на $\lambda_j \tau_i$, и с уравнениями (11), умножая их на τ_i , то в результате получим те же самые две волны – Σ_3 и Σ_4 , которые распространяются с теми же скоростями G_3 и G_4 и на которых выполняются дополнительные соотношения: $[\theta] \neq 0$ на Σ_3 и $[\omega_\tau] \neq 0$ на Σ_4 . Иначе говоря, на волне Σ_3

$$G = G_3, \quad [\eta] = [v_i]\xi_i \neq 0, \quad [\theta] = [v_i]\tau_i \neq 0, \quad (32)$$

на волне Σ_4

$$G = G_4 \quad [\omega_\xi] = [\omega_i] \xi_i \neq 0, \quad [\omega_\tau] = [\omega_i] \tau_i \neq 0. \quad (33)$$

Волну Σ_3 назовём квазисдвиговой, а волну Σ_4 – квази-изгибно-вращательной.

Приставка «квази» в названии волн означает, что каждая из этих волн наряду с основными компонентами содержит примесные компоненты всех других волн, но которые на порядок выше основных компонентов. Например, если на волне рвётся какая-либо величина, то на той же волне испытывают разрывы первые производные от всех других основных компонентов.

Из найденных значений четырёх скоростей нестационарных волн (поверхностей сильного разрыва) видно, что (1) они зависят только от констант материала и (2), что только один микрополярный модуль α , который определяет асимметрию тензора напряжений, влияет на скорость квазисдвиговой волны G_3 , в то время как параметры Ламе λ и μ не оказывают влияния на скорости волн Коссера, то есть на скорости второй G_2 и четвёртой G_4 волн, которые зарождаются вследствие микрополярных вращений. Другими словами, математическая теория Коссера является несвязанной теорией (аналогичная ситуация имеет место в термоупругости, где существуют несвязанная и связанная теории).

ЛИТЕРАТУРА

1. Россихин, Ю. А. Аналитический обзор теорий типа Тимошенко для тонкостенных балок открытого профиля / Ю. А. Россихин, М. В. Шитикова // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – № 9. – С. 15-19.
2. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий – М.: Мир, 1975. – 256 с.
3. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твёрдых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
4. Timoshenko, S. P. Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einen Balken / S. P. Timoshenko // Zeitschrift für Mathematik und Physik. – 1913. – Vol. 62. – №№ 1–4. – P. 198-209.
5. Rossikhin, Yu. A. The method of ray expansions for investigating transient wave processes in thin elastic plates and shells / Yu. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mechanica, 2007. – Vol. 189. – №№ 1-2. P. 87-121.
6. Rossikhin, Yu. A. The method of ray expansions for solving boundary-value dynamic problems for spatially curved rods of arbitrary cross-section / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Acta Mechanica, 2008. – Vol. 200. – №№ 3-4. P. 213-238.
7. Rossikhin, Yu. A. Dynamic Response of Pre-Stressed Spatially Curved Thin-Walled Beams of Open Profile / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Springer Series «Springer Briefs in Applied Sciences and Technology». – 2011. – 86 p.
8. Rossikhin, Yu. A. Dynamic response of spatially curved thermoelastic thin-walled beams of generic open profile subjected to thermal shock / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Journal of Thermal Stresses. – 2012. – Vol. 35. – №№ 1–3. – P. 205-234.
9. Rossikhin, Yu. A. Thermal Shock upon Thin-Walled Beams of Open Profile / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Encyclopedia of Thermal Stresses. – 2014. – Springer. – Vol. 9. – P. 5146-5167.
10. Rossikhin, Yu. A. Transient wave velocities in pre-stressed thin-walled beams of open profile with Cosserat-type micro-structure / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Composites Part B: Engineering. – 2015. – Vol. 83. – P. 323-332.
11. Rossikhin, Yu. A. A new approach for studying the transient response of thin-walled beams of open profile with Cosserat-type micro-structure / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Composite Structures. – 2017. – Vol. 169. – P. 153-166.
12. Nowacki, W. Theory of asymmetric elasticity / W. Nowacki. – Oxford: Pergamon Press, 1986. – 383 p.



Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А.
D. A. Indeitsev, Yu. A. Mochalova

ПОВЕРХНОСТНАЯ ДИФфуЗИЯ ВОДОРОДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЙ ОБРАЗЦА

SURFACE DIFFUSION OF HYDROGEN UNDER DYNAMIC LOADS

Индейцев Дмитрий Анатольевич – член-корреспондент Российской академии наук, профессор, доктор физико-математических наук, научный руководитель Института проблем машиноведения Российской академии наук (Россия, Санкт-Петербург); 199178, г. Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой пр., 61; тел.: + 7 (812) 321-47-78. E-mail: Dmitry.Indeitsev@gmail.com.

Mr. Dmitry A. Indeitsev – Corresponding member Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Director of Institute of Problems of Engineering Science Russian Academy of Sciences (Russia, Saint-Petersburg); 199178, Saint-Petersburg, Vasilievsky island, Bolshoy pr., 61; tel.: + 7 (812) 321-47-78. E-mail: Dmitry.Indeitsev@gmail.com.

Мочалова Юлия Александровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения Российской академии наук (Россия, Санкт-Петербург); 199178, г. Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой пр., 61; тел.: + 7 (812) 321-47-78. E-mail: Dmitry.Indeitsev@gmail.com.

Ms. Yulia A. Mochalova – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences (Russia, Saint-Petersburg); 199178, Saint-Petersburg, Vasilievsky island, Bolshoy pr., 61; tel.: + 7 (812) 321-47-78. E-mail: Dmitry.Indeitsev@gmail.com.

Аннотация. В рамках двухконтинуумной модели упругой среды изучается взаимовлияние процессов диффузии примеси и деформаций основной структуры. Полагается, что частицы примеси встраиваются в последнюю и изменяют её механические свойства. На примере модельной задачи о перераспределении примеси в одномерном стержне, находящемся под действием циклической нагрузки, указаны особенности локализации примеси и с этим связанное падение обобщённой жесткости образца. Исследован процесс диффузионного роста поверхностной плёнки, вызываемый упругими напряжениями; оценено взаимовлияние диффузионного роста и параметров волн напряжений, распространяющихся в плёнке.

Summary. The authors study the mutual influence of diffusion of impurities and deformations of the basic structures within the framework of the two-path model of an elastic medium. It is believed that the impurity particles are built into the latter and change its mechanical properties. On the example of the model problem of the redistribution of an impurity in a one-dimensional rod under the action of a cyclic load, the features of impurity localization and the drop in the generalized stiffness of the sample are indicated. The process of diffusion growth of a surface film, caused by elastic stresses is focused on; mutual influence of diffusion growth and parameters of stress waves in a film is investigated.

Ключевые слова: упругость, диффузия примеси, вибрационная локализация примеси, напряжения и прочность многокомпонентных тел.

Key words: elasticity, impurity diffusion, vibrational impurity localization, stresses and strength of multicomponent bodies.

УДК 539.3

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований президиума Российской академии наук на 2018 г. № 31 «Фундаментальные исследования физико-технических проблем энергетики».

Введение

В данной статье мы будем рассматривать проблему взаимного влияния диффузии примеси и деформации упругой среды под действием растягивающих и сжимающих напряжений. Известно, что нестационарные механические нагрузки приводят к перераспределению примеси в материале, что может оказать значительное влияние на механические свойства образца [9]. Исследование диффузии примеси в твёрдых телах, как правило, проводится в рамках феноменологических моделей, которые позволяют учитывать только влияние напряжённого состояния среды на диффузию примеси [3]. При этом остаётся открытым вопрос: какое влияние на механические свойства материала оказывают кинетические процессы (диффузия примеси, осаждение частиц примеси на основную структуру), происходящие в нём? Для описания материала, содержащего примесь, в работах [6; 8] была предложена двухкомпонентная континуальная модель. Взаимодействие между примесью и основной структурой определялось внутренними силами взаимодействия. Было сделано предположение, что внутренние силы взаимодействия зависят от деформации материала (напряжённого состояния) и массообмена между частицами примеси и основной структуры. С помощью этого подхода в работе [8] было описано получение системы определяющих уравнений и исследовано статическое напряжённое состояние материала с примесью. В работе [6] предложена модель для описания процесса структурной перестройки в одномерном образце под действием динамической нагрузки. В ней использовались упрощённые балансовые уравнения, не содержащие конвективной диффузионной части, и изменение механических свойств материала было вызвано структурной перестройкой – абсорбцией примеси на основную структуру (массообменом между частицами примеси и основной структурой). В работе [5] напряжённо-деформируемое состояние материала с примесью было исследовано с помощью методов статистической физики. Было получено хорошее качественное совпадение результатов с результатами, которые даёт двухкомпонентная механическая модель (см. раб. [6; 8]). В работе [7] выведено уравнение движения примеси – обобщённое уравнение диффузии, позволяющее учитывать влияние деформации основной структуры на перераспределение примеси. Рассмотрен одномерный стержень под действием циклической нагрузки; показано, что если не учитывать массообмен между компонентами среды, то частицы примеси локализуются в центральной части образца.

Данная статья, целями которой являются описание с помощью двухкомпонентной модели динамики материала, содержащего примесь; исследование взаимного влияния диффузии примеси и деформации основной структуры, представляет собой продолжение исследований, начало которых отражено в работах [7; 8]. В пункте 1 приведены уравнения двухкомпонентной среды в общем виде. В пункте 2 выводится обобщённое уравнение диффузии и рассматривается модельная задача о перераспределении примеси в одномерном стержне под действием циклической нагрузки. Здесь предполагается, что свободные частицы примеси могут встраиваться в основную структуру и, таким образом, влиять на её механические свойства. В данной работе мы ограничимся исследованием частных (предельных) случаев, которые качественно описывают два важнейших явления, экспериментально наблюдаемых при воздействии вибрации на материалы с примесью, – локализацию концентрации примеси и падение обобщённой жёсткости образца. При работе над обеими задачами получены приближённые аналитические решения, которые хорошо согласуются с проведёнными ранее численными исследованиями и экспериментальными данными. Эти модельные задачи позволяют качественно исследовать особенности диффузионных процессов при нестационарном внешнем воздействии и могут являться тестовыми для анализа сложных задач о взаимном влиянии диффузионных и динамических процессов в многокомпонентных средах и связанных с ними проблем механики прочности материалов.

В пункте 3 с помощью предложенного двухкомпонентного подхода рассматривается другой класс диффузионных задач, а именно изменение поверхности тонкой плёнки, вызванное диффузионным переносом вещества под действием механической нагрузки. Известно, что диффузионные процессы в образце происходят наиболее активно в поверхностном слое (все неприятности происходят именно там – изменение формы поверхности, образование



микротрещин и т. д.). Здесь будем рассматривать тонкий поверхностный слой материала как двумерную структуру и получим уравнение изменения поверхности плёнки, которое позволяет описывать как диффузионный рост плёнки, вызванный упругими напряжениями, так и распространение волн в ней, а также их взаимное влияние.

1. Общие уравнения двухкомпонентной среды

Будем считать, что плёнка состоит из двух подсистем (компонент), то есть в каждой пространственной точке (\mathbf{x}, t) имеют место две материальные компоненты со своими плотностями ρ_1, ρ_2 и скоростями движения $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Плотность среды ρ_m и скорость \mathbf{v}_m среды в целом в точке (\mathbf{x}, t) удовлетворяют следующим соотношениям: $\rho_m(\mathbf{x}, t) = \rho_1(\mathbf{x}, t) + \rho_2(\mathbf{x}, t)$, $\rho_m(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_m(\mathbf{x}, t) = \rho_1(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) + \rho_2(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}_2(\mathbf{x}, t)$.

Закон сохранения массы для среды в целом выглядит так: $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m) = 0$, а для каждой материальной компоненты он будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) = -J, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = J, \quad (2)$$

где J – функция источника плотности одной материальной компоненты (источниковый член). Напряжённое состояние каждой компоненты среды выражается тензорами $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$, и напряжённое состояние среды в целом $\boldsymbol{\sigma}_m$ выражается $\boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots)$, $\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots)$. Для внешних сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, действующих на первую и вторую компоненты, справедливо

$$\rho_m \mathbf{F}_m = \rho_1 \mathbf{F}_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2,$$

где \mathbf{F}_m – внешняя сила, действующая на среду в целом.

Закон сохранения количества движения для среды в целом будет иметь вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m + \rho_m \mathbf{F}_m = \rho_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + \rho_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + J(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

а для каждой материальной компоненты он будет выглядеть таким образом:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \rho_1 \mathbf{F}_1 + \mathbf{R} = \rho_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - J\mathbf{v}_1, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \rho_2 \mathbf{F}_2 - \mathbf{R} = \rho_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + J\mathbf{v}_2, \quad (4)$$

где \mathbf{R} – сила взаимодействия между компонентами среды.

2. Уравнение движения примеси. Обобщённое диффузионное уравнение

В рамках двухкомпонентного подхода [8] будем рассматривать две взаимопроникающие среды: динамически деформируемую основную структуру тела (например, решётку металла) и подвижную примесь в теле. Будем предполагать, что возможен массообмен между диффундирующим веществом и основной структурой. Совместное движение и связь этих двух сред описываются в абсолютной системе координат следующей системой уравнений:

- уравнением движения основной структуры

$$\nabla \cdot \sigma = \rho_1 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - J\mathbf{v}_1 - \mathbf{R}; \quad (5)$$

- уравнением движения подвижной примеси

$$-\nabla p = \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + J\mathbf{v}_2 + \mathbf{R}; \quad (6)$$

- уравнением баланса масс основной структуры

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) = -J; \quad (7)$$

- уравнением баланса масс подвижной примеси

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = J; \quad (8)$$

- уравнением состояния основной структуры

$$\sigma = \sigma(\varepsilon); \quad (9)$$

- уравнением состояния подвижной примеси

$$p = p(\rho_2). \quad (10)$$

Здесь ρ_1 , \mathbf{v}_1 , σ , ε – плотность, вектор скорости, тензор напряжений и деформация первой компоненты соответственно; ρ_2 , \mathbf{v}_2 , p – плотность, вектор скорости и давление подвижной примеси (вторая компонента). Взаимодействие между компонентами было определено в работе [8], и внутренняя сила взаимодействия основной структуры и подвижной примеси определяется как

$$\mathbf{R} = \mu(\varepsilon)\rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (11)$$

Здесь $\mu(\varepsilon)$ – коэффициент сопротивления. Далее реактивными силами $J\mathbf{v}_1$ и $J\mathbf{v}_2$ в уравнениях (5) и (6) будем пренебрегать.

Система уравнений (5)–(11), дополненная начальными и граничными условиями, описывает динамику среды, содержащей примесь. Введём относительную скорость движения примеси $\mathfrak{V} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Подставляя \mathbf{v}_2 , выраженную через относительную скорость движения примеси, в (6) и предполагая, что переносные силы инерции много больше относительных, получим

$$\mathfrak{V} = -\frac{1}{\mu(\varepsilon)\rho_2} \left(\nabla p + \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right). \quad (12)$$

Подставляя \mathfrak{V} в выражение (8), получим диффузионное уравнение, учитывающее влияние деформации и силы инерции:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu(\varepsilon)} \left(\nabla p + \rho_2 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) - \rho_2 \mathbf{v}_1 \right] = J. \quad (13)$$

Дифференцируя уравнение состояния (10) по ρ_2 и предполагая, что скорость звука в примеси $c_2^2 = \partial p / \partial \rho$ мало меняется, уравнение (13) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \nabla \cdot \left[D(\varepsilon) \left(\nabla \rho_2 + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) - \rho_2 \mathbf{v}_1 \right] = J, \quad (14)$$

где $D(\varepsilon) = c_2^2 / \mu(\varepsilon)$ – коэффициент диффузии, который пропорционален характерному размеру пористости основной структуры и зависит от сферической деформации [7].

Таким образом, полученное уравнение определяет движение примеси. Первое слагаемое

$$\nabla \cdot \left[D(\varepsilon) \left(\nabla \rho_2 + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right] \quad (15)$$

определяет диффузионный перенос примеси. Второе слагаемое $\nabla \cdot [\mathbf{v}_1 \rho_2]$ определяет перенос примеси за счёт движения основной структуры (ранее это слагаемое не учитывалось в [7]). Заметим, что полученное обобщённое уравнение диффузии (14) отличается от известных адвективно-диффузионных уравнений зависимостью коэффициента диффузии от деформации основной структуры, а также наличием в первом «диффузионном» слагаемом (15) члена, определяемого вибрацией основной структуры.

Если нет деформации основной структуры, то уравнение (14) сводится к классическому уравнению диффузии с коэффициентом диффузии $D_0 = D(0)$. Поэтому в первом приближении D определяется экспериментальными значениями [7]. Для малых деформаций можно считать, что значение коэффициента диффузии D линейно зависит от ε и $D(\varepsilon) = D_0 - D_1 \varepsilon$, где $D_1 > 0$.

Система уравнений (5), (7), (9) и (14) позволяет нам определить динамику перераспределения примеси при деформации материала. Заметим, что при решении конкретных задач уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями.

2.1. Постановка задачи. Система определяющих уравнений

В качестве примера рассмотрим одномерный стержень длиной $2L$, содержащий примесь и находящийся под воздействием циклической нагрузки $F_0 \sin \omega t$, где ω – частота нагрузки.

Обозначим ρ_1^+ плотность частиц примеси, осаждённых на основную структуру, и $\rho_1 = \rho_1^0 + \rho_1^+$, где $\rho_1^0 = \text{const}$. Тогда для плотности осаждённых частиц из уравнения (7) получим

$$\frac{\partial \rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1^+ v_1) = -J. \quad (16)$$

Заметим, что $\rho_1^+ \ll \rho_1$ и в уравнении динамики стержня (5) можно считать $\rho_1 = \text{const}$. Кроме того, в большинстве случаев влиянием внутренней силы взаимодействия R на движение основной структуры в уравнении (5) можно пренебречь.

Согласно материалам работы [8], напряжённое состояние основной структуры зависит от плотности осаждённой примеси ρ_1^+ и уравнение состояния для первой компоненты (9) может быть записано в виде

$$\sigma = E(\rho_1^+) \varepsilon, \quad (17)$$

где $E(\rho_1^+)$ – обобщённый модуль Юнга.

Источниковые члены запишем в следующем виде: $J = -\alpha \rho_2$, то есть будем считать, что возможно только встраивание частиц в основную структуру. Коэффициент α характеризует скорость осаждения частиц примеси на кристаллическую решётку и определяется из экспериментальных данных. Более подробно об этом изложено в работах [6; 8].

Переходя в уравнениях (5), (14) и (16) к перемещениям u ($v_1 = \partial u / \partial t$, $\varepsilon = \partial u / \partial x$), получим следующую систему определяющих соотношений для рассматриваемого одномерного стержня:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma = E(\rho_1^+) \varepsilon, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho_1^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_1^+ \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \alpha \rho_2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(D_0 - D_1 \frac{\partial u}{\partial x}) \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right] = -\alpha \rho_2 \quad (20)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$u|_{x=0} = 0, \quad \sigma|_{x=L} = F_0 \sin \omega t, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (D_0 - D_1 \frac{\partial u}{\partial x}) \left[\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \frac{\rho_2}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=L} = 0, \quad (22)$$

$$\rho_2|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \rho_1^+|_{t=0} = 0.$$

Введём безразмерные величины (параметры) следующим образом:

$$t_1 = \frac{D_0}{L^2} t, \quad x_1 = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \Omega = \frac{L^2}{D_0} \omega, \quad \bar{\sigma} = \frac{L^2}{\rho_1 D_0^2} \sigma,$$

$$\bar{E}_0 = \frac{L^2}{\rho_1 D_0^2} E_0, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha L^2}{D_0}, \quad \beta = D_1 / D_0, \quad \eta = \frac{D_0^2}{c_2^2 L^2}.$$

Тогда система уравнений (18)–(20) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_1^2}, \quad \bar{\sigma} = \bar{E}(\bar{\rho}_1^+) \varepsilon, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[(1 - \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}) \left(\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x_1} + \eta \bar{\rho}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_1^2} \right) - \bar{\rho}_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_1} \right] = -\bar{\alpha} \bar{\rho}_2, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1^+}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\bar{\rho}_1^+ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_1} \right] = \bar{\alpha} \bar{\rho}_2; \quad (25)$$

с граничными условиями:

$$\bar{u}|_{x_1=0} = 0, \quad \bar{\sigma}|_{x_1=1} = \bar{F}_0 \sin \Omega t_1,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad (1 - \beta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1}) \left(\frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial x_1} + \eta \bar{\rho}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_1^2} \right) - \bar{\rho}_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t_1} \Big|_{x_1=1} = 0, \quad (26)$$

где $\bar{F}_0 = L^2 F_0 / \rho_1 D_0^2$ и начальные условия

$$\bar{\rho}_2|_{t_1=0} = \bar{\rho}_0(x), \quad \bar{\rho}_1^+|_{t_1=0} = 0. \quad (27)$$

Система уравнений (23)–(27) сложна для прямого математического анализа, так как описывает взаимосвязь динамических процессов, имеющих разные временные масштабы: волновые процессы в основной структуре, диффузию примеси и массообмен между компонентами. Поэтому мы рассмотрим ряд частных случаев. Далее черту над величинами (верхнее подчеркивание) опускаем.

2.2. Локализация диффузионного процесса

Пусть $J = 0$, то есть нет массообмена между компонентами. В этом случае частицы примеси не оседают на решётку, $\rho_1^+ = 0$ и модуль Юнга материала остаётся постоянным $E = E_0$. Таким образом, система уравнений (23)–(27) распадается на две задачи. Первая задача определяет колебания стержня под действием вибрационной нагрузки, приложенной на его концах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (28)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = F_0 \sin \Omega t_1. \quad (29)$$

Здесь $c_0^2 = (cL/D_0)^2$, $c = \sqrt{E_0/\rho_1}$ – скорость звука в стержне. Естественно считать колебания стержня установившимся процессом и, таким образом, решение задачи (28), (29) будет иметь следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{c_0 F_0}{\Omega \cos(\Omega/c_0)} \sin \Omega t \sin(\Omega x/c_0).$$

Заметим, что $\Omega/c_0 \ll 1$, тогда

$$u(x, t) = F_0 x \sin \Omega t. \quad (30)$$

Вторая задача описывает перераспределение примеси в стержне под действием вибрационной нагрузки:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x}) \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \eta \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} |_{x=0} = 0, \quad (1 - \beta \frac{\partial u}{\partial x}) \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \eta \rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} |_{x=1} = 0, \quad (32)$$

$$\rho_2 |_{t=0} = \rho_0(x). \quad (33)$$

Обратимся к исследованию обобщённого уравнения диффузии. Заметим, что если деформации основной структуры нет, то уравнение (31) превращается в классическое уравнение диффузии. Решение соответствующей задачи Коши известно, и диффузия приводит к равномерному распределению плотности примеси по длине стержня:

$$\rho_2 = \int_0^1 \rho_0 dx \quad \text{для } t \rightarrow \infty.$$

Если в начальный момент времени распределение примеси постоянная величина $\rho_0 = \text{const}$, то диффузии примеси не происходит.

Если считать, что коэффициент диффузии не зависит от деформации стержня, то задача (31)–(33) сводится к следующей:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\rho_2 \Big|_{t=0} = \rho_0(x).$$

Здесь $u(x, t)$ определяется (30). Это так называемое адвективно-диффузионное уравнение с переменным (периодическим) коэффициентом, которое подробно исследовано и хорошо поддается численному анализу. Диффузия приводит к перераспределению примеси с последующими колебаниями концентрации примеси около среднего значения, которые вызваны вибрационным воздействием. Максимальные значения концентрации примеси достигаются на концах и в центральной части образца. Обратимся к общему случаю (31)–(33). Будем предполагать, что при вибрации стержня с частотой Ω плотность примеси ρ_2 , а также производные $\partial \rho_2 / \partial x$, $\partial^2 \rho_2 / \partial x^2$ мало меняются за период колебаний, то есть $\langle \rho_2(x, t) \rangle = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \rho_2(x, t) dt = \rho_2(x, t)$. Тогда, подставляя (30) в (31)–(33) и усредняя полученную систему по интервалу $[t, t + 2\pi / \Omega]$, получим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \gamma x \rho_2 \right], \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \gamma x \rho_2 \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (35)$$

$$\rho_2 \Big|_{t=0} = \rho_0, \quad (36)$$

где $\gamma = \beta \eta A_0^2 \Omega^2 / 2$. Решение задачи (34)–(36) будем искать с помощью метода разделения переменных. Поэтому сначала решим соответствующую задачу Штурма – Лиувилля, а именно определим те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$L\varphi = -\lambda\varphi, \quad L\varphi = (\varphi_x + \gamma x\varphi)'_x, \quad (37)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\varphi_x \Big|_{x=0} = 0, \quad \varphi_x + \gamma\varphi \Big|_{x=1} = 0. \quad (38)$$

Заметим, что преобразованиями $\varphi = \exp(-\gamma\zeta^2 / 4)\psi$ и $x = \sqrt{\gamma}\zeta$ уравнение (37) приводится к уравнению параболического цилиндра стандартной формы $v_{\zeta\zeta} - [\frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{2} - \lambda]\psi = 0$, решение которого удобно записать через вырожденные гипергеометрические функции [2]. Тогда решение (37) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \left[a {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) + b x {}_1F_1\left(\frac{\gamma - \lambda}{2\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) \right] e^{-\gamma x^2 / 2}, \quad (39)$$

где ${}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция; a, b – неизвестные постоянные.

Дифференцируя (39) по x и подставляя полученные результаты в граничные условия (38), получим $b = 0$, и уравнение для определения собственных чисел λ имеет вид

$$\gamma {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) - (\gamma + \lambda) {}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) = 0. \quad (40)$$

Исследуя (40) для различных значений параметра γ , получим, что оператор L имеет простой дискретный спектр собственных чисел, начинающийся с $\lambda_0 = 0$:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Соответствующие собственные функции определяются выражением

$$\varphi_k(x) = {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) \exp(-\gamma x^2/2) / N_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (41)$$

где $N_k = \left[\int_0^1 {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) e^{-\gamma x^2/2} dx \right]^{1/2}$ ($k = 0, 1, \dots$) – нормирующие коэффициенты.

Заметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ собственные числа спектральной задачи (37) и (38) $\lambda_k \rightarrow (\pi k)^2$, а соответствующие собственные функции $\varphi_k \rightarrow \cos \pi k x$, $k = 0, 1, \dots$. При $\gamma < 1$ это даёт хорошее приближение собственных чисел и собственных функций оператора L .

Будем искать решение исходной задачи Коши (34)–(36) в виде разложения по найденным собственным формам:

$$\rho_2(x, t) = \varphi_0(x) q_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) q_k(t). \quad (42)$$

Подставляя (42) в (34)–(36), получим для определения обобщённых функций $q_k(t)$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= 0, \\ \dot{q}_k + \lambda_k q_k &= 0, \quad k = 1, \dots \\ q_k|_{t=0} &= (\varphi_k, \rho_0(x)), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь $(\varphi_k, \rho_0(x)) = \int_0^1 \rho_0(x) \varphi_k(x) dx$. Тогда решение задачи Коши (34)–(36) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_2(x, t) &= c_0 \exp(-\gamma x^2/2) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k {}_1F_1\left(-\frac{\lambda_k}{2\gamma}, \frac{1}{2}, \frac{\gamma x^2}{2}\right) \exp(-\lambda_k t - \gamma x^2/2), \\ c_k &= \frac{1}{N_k} \int_0^1 \rho_0(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Собственные числа λ_k определяются из уравнения (40). Если $\rho_0 = \text{const}$, то при больших t плотность $\rho_2(x, t)$ стремится к стационарному решению (34), которое имеет вид

$$\rho_2(x, t) \rightarrow \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{\rho_0}{\text{erf} \sqrt{\gamma/2}} \exp(-\gamma x^2/2), \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, полученное приближённое аналитическое решение задачи показывает, что влияние колебаний приводит к накоплению примеси в центральной части стержня. Если рассматривать в качестве примеси растворённый в металле водород, то полученное решение качественно описывает экспериментально наблюдаемое явление перераспределения водорода

в стальном образце под действием длительной циклической нагрузки [4; 9]. Кроме того, решение согласуется с численными результатами, описанными в работе [7].

2.3. Структурные изменения в материале

Рассмотрим второй частный случай. Будем пренебрегать конвективной диффузионной частью в уравнениях баланса масс (19) и (20), то есть будем предполагать, что плотности компонент почти не меняются по длине стержня $\rho_2(x, t) = \rho_2(t)$, $\rho_1^+(x, t) = \rho_1^+(t)$. Тогда решение уравнений (24) и (25) имеет вид

$$\rho_2 = \rho_0 \exp\{-\alpha t\}, \quad \rho_1^+ = \rho_0(1 - \exp\{-\alpha t\}).$$

Модуль упругости в соответствии с моделью, предложенной в работе [8], принимает вид $E(\rho_1^+) = 1/[1 + \kappa(1 - \exp\{-\alpha t\})]$, и уравнение движения основной структуры (23) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [1 + \kappa(1 - \exp\{-\alpha t\})] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = \bar{F}_0 [1 + \kappa(1 - \exp\{-\alpha t\})] \sin \Omega t,$$

где κ – безразмерный коэффициент, определяющий отношение модуля Юнга «чистого» материала к модулю Юнга материала со встроенными частицами примеси.

Считая $\alpha/\Omega \ll 1$ (малый параметр), будем решать задачу, используя метод многих масштабов. Введём два масштаба времени – t и $\tau = \alpha t$ – и для нулевого приближения получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = [1 + \kappa(1 - \exp\{-\tau\})] \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},$$

$$u_0|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x}|_{x=1} = \bar{F}_0 [1 + \kappa_2(1 - \exp\{-\tau\})] \sin \Omega t,$$

решение которой имеет вид

$$u_0(x, t, \tau) = \frac{\bar{F}_0 \Omega_0(\tau)}{\Omega^2 \cos \Omega_0(\tau)} \sin \Omega_0(\tau) x \sin \Omega t,$$

где $\Omega_0(\tau) = \Omega \sqrt{1 + \kappa(1 - e^{-\tau})}$. Таким образом, в предположении, что $\alpha \ll 1$, получим «медленное» падение жёсткости конструкции и увеличение амплитуды колебаний. Если $\alpha \ll 1$, то свободный водород встраивается в решётку со скоростью, превышающей скорость звука в материале, и структурная перестройка в материале (изменение обобщённой жёсткости конструкции) происходит почти мгновенно. Из экспериментальных данных известно, что скорость таких изменений действительно может быть выше скорости звука в материале [6].

В данной модели мы считали α постоянной величиной, но, по всей видимости, α , как и коэффициент диффузии, должна зависеть от деформации основной структуры, а возможно и концентрации примеси.

В конце данного раздела сделаем несколько замечаний. Предложенная двухкомпонентная модель, которая позволяет описать диффузию примеси в деформируемом материале и изменения структуры материала (в частности, водородного охрупчивания металла) и сводится к взаимодействию трёх конкурирующих процессов:

- диффузии примеси, скорость которой может зависеть от деформации основной структуры;



- осаждения примеси на основную структуру, которое, в общем случае, также зависит от деформации тела;

- нестационарно-волновых процессов в материале.

При решении конкретных задач определяющим является то, что эти процессы имеют различные масштабы во времени.

Мы рассмотрели два частных случая. Первый, когда массообменом примеси и основной структурой можно пренебречь (источниковые члены $J = 0$). Показано, что в этом случае влияние циклической нагрузки приводит к локализации примеси в центральной части образца. Во втором предельном случае предполагается, что скорость осаждения примеси на основную структуру много выше скорости диффузии и диффузионно-конвективными членами в балансовых уравнениях можно пренебречь. Показано, что это приводит к структурным изменениям в материале, а именно к падению обобщённой жёсткости образца.

В общем случае процессы диффузии и массообмена невозможно разделить, однако при анализе задач о взаимном влиянии диффузии примеси и напряжённо-деформируемого состояния среды можно понять, как соотносятся скорости этих процессов. Например, если скорость диффузии примеси больше скорости её осаждения на основную структуру, то можно ожидать, что под действием вибрации примесь сначала локализуется в некоторой области образца и частицы примеси встраиваются в основную структуру именно в этой локальной области, что приводит к локальному изменению структуры образца. Если же скорость осаждения примеси значительно превосходит скорость диффузии, тогда примесь встраивается в основную структуру, не успевая локализоваться, и структурная перестройка, а также изменение механических свойств происходят по всей длине образца.

3. Модель тонкой плёночной структуры

Целью данного раздела является получение на основе предложенного двухкомпонентного подхода эволюционного уравнения, описывающего изменение поверхности тонкой плёнки, вызванное диффузионным переносом вещества. Многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют об образовании на поверхности тонких плёнок периодических структур, которые возникают в результате диффузионного переноса вещества, вызванного упругими напряжениями и силами поверхностного натяжения, действующими в плёнках. Между тем теоретического обоснования, позволяющего выявить соотношения параметров соответствующих образованию той или иной периодической структуры, получено не было.

Физическая модель. Конденсация плёнок и их рост – это очень сложный многостадийный процесс, сопровождающийся различными нелинейными явлениями. Будем рассматривать стадию образования зародышей островков и их сепаратного роста, то есть тот момент времени, когда на поверхности тонких плёнок образуются и растут островки новой фазы. Зарождение происходит из атомов самой плёнки в результате диффузионного переноса вещества под действием упругой энергии:

1. Вначале при конденсации на твёрдую подложку плёнка растёт послойно, «растекаясь» по подложке и образуя так называемый смачивающий слой.

2. Материалы подложки и плёнки имеют различные параметры кристаллических решёток, и поэтому упругая энергия увеличивается с ростом плёнки. Энергия смачивания при этом уменьшается, так как атомы располагаются всё дальше и дальше от подложки.

3. Когда упругая энергия увеличивается настолько, что начинает превышать энергию смачивания, становится возможной релаксация упругой энергии. Один из путей – образование зародышей на поверхности плёнки, то есть уменьшение упругой энергии за счёт диффузии атомов от более напряжённых участков к менее напряжённым. В результате образовавшиеся зародыши растут, уменьшая упругую энергию плёнки; смачивающий слой уменьшается, снабжая растущие островки атомами.

Образование зародышей островков и их дальнейший рост вызваны упругими напряжениями, возникающими в смачивающем слое (материалы подложки и плёнки имеют различные параметры кристаллических решёток, и поэтому упругая энергия увеличивается

с ростом плёнки). Упругие напряжения в смачивающем слое вызывают диффузию атомов к островку, так как в островке напряжения слабее, чем в слое [1], и, следовательно, можно говорить о возникновении в плёнке диффузионного потока вещества (см. рис. 1).

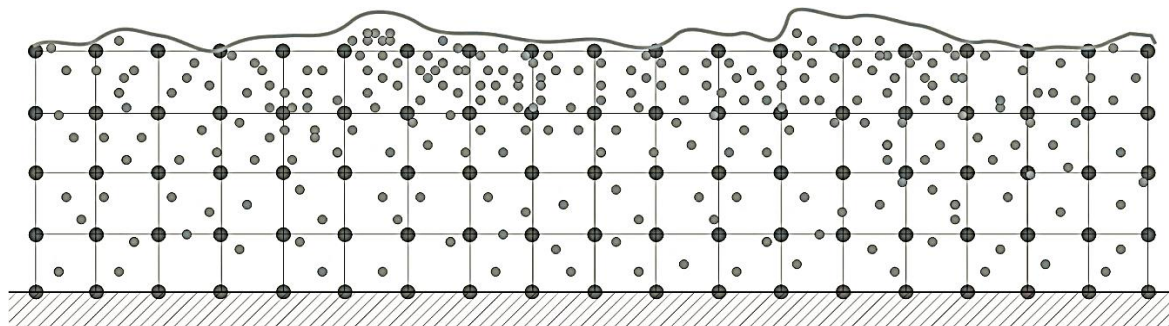


Рис. 1. Диффузия примеси в кристаллической решётке

В качестве математической модели тонкой плёнки рассмотрен двумерный упругий слой переменной толщины $h = h_0 + \tilde{h}$ со свободной поверхностью, лежащий на абсолютно твёрдой подложке (h_0 – толщина недеформируемой плёнки).

Декартова система координат (x, y) выбрана так, что ось x связана с твёрдой подложкой, а ось y направлена вертикально вверх.

Как и в пункте 1, будем считать, что плёнка состоит из двух подсистем (компонент): движущейся компоненты вещества (диффузионный поток с плотностью ρ_2 и скоростью v_2 в данной точке пространства) и свободного слоя (недиффундирующее вещество) с плотностью ρ_1 и скоростью v_1 .

Сделаем ряд упрощающих предположений:

- будем пренебрегать обменом масс между компонентами среды, то есть $J = 0$;
- будем считать, что отсутствуют внутренние и внешние источники притока/стока массы;
- будем пренебрегать физико-химическими превращениями;
- будем считать, что отсутствуют объёмные силы $F = 0$.

Тогда уравнения движения [см. (3), (4)] первой компоненты для плёночной 2D-структуры принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + R_x = \rho_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + R_y = \rho_1 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t}, \quad (45)$$

а для второй компоненты

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - R_x = \rho_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial t}, \quad (46)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - R_y = \rho_2 \frac{\partial v_{2y}}{\partial t}. \quad (47)$$

Заметим, что закон сохранения массы для первой компоненты выполняется автоматически. Закон сохранения массы для диффузионного потока имеет вид

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{v}_2) = 0.$$

Внутреннюю силу взаимодействия основной структуры материала и диффузионного потока R определим следующим образом:

$$R_x = Q_x + \lambda_x \frac{\rho_2}{h} [v_{2x} - v_{1x}],$$

$$R_y = Q_y + \lambda_y \frac{\rho_2}{h} [v_{2y} - v_{1y}].$$

Здесь Q_x, Q_y – силы упругого взаимодействия между компонентами среды, которые будут определены ниже; λ_x, λ_y – коэффициенты сопротивления. Вторые слагаемые в последних формулах (как и при выводе обобщённого уравнения диффузии) имеют смысл гидравлического сопротивления, то есть считаем, что диффузионный поток, проходя через кристаллическую решётку, испытывает невязкое сопротивление.

Граничные условия можно поставить только для среды в целом. Динамические краевые условия имеют вид

$$\sigma_{my} - \tau_m \frac{\partial h}{\partial x} = \gamma K - m \frac{\partial v_{my}}{\partial t}, \quad \tau_m - \sigma_{mx} \frac{\partial h}{\partial x} = -\gamma K \frac{\partial h}{\partial x}, \quad y = \tilde{h}(x, t).$$

Здесь γ – поверхностное натяжение; K – кривизна; m – массовая плотность поверхностного слоя плёнки.

Кинематические краевые условия можно записать в виде

$$v_{my} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_{mx} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad y = \tilde{h}(x, t),$$

$$v_{mx} = 0, \quad v_{my} = 0, \quad y = -h_0.$$

Итак, получили уравнения динамики каждой компоненты, но граничные условия записаны для среды в целом. Разделим краевые условия. Для этого сделаем ряд предположений. Будем считать, что нет напряжений на свободной поверхности несущей конструкции (на кристаллической решётке) и напряжения на свободной поверхности определяются второй компонентой. Тогда при $y = \tilde{h}(x, t)$ получим

$$\sigma_y - \tau \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \tag{48}$$

$$\tau - \sigma_x \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \tag{49}$$

Так как предполагалось, что вторая компонента – жидкость с инерционной свободной поверхностью (γ, m), то

$$p = -\gamma K + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}, \quad y = \tilde{h}(x, t). \tag{50}$$

Естественно считать, что для первой компоненты скорость на твёрдой подложке равна нулю, то есть $v_{1x} = v_{1y} = 0$, $y = -h_0$, а для второй компоненты – это условие непротекания на твёрдой подложке $v_{2y} = 0$, $y = -h_0$ и условие, что все частицы остаются на свободной поверхности $v_{2y} = \frac{\partial h}{\partial t} + v_{2x} \frac{\partial h}{\partial x}$, $y = \tilde{h}(x, t)$. Таким образом, удалось разделить краевые условия.

Проведём осреднение по толщине слоя уравнений (первая компонента) с учётом краевых условий, при этом предполагая, что силами инерции можно пренебречь. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x} [h\bar{\sigma}_x] - \tau(x, -h_0) + h\bar{Q}_x + h\bar{D}_x = \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} [h\bar{v}_{1x}], \quad (51)$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial x} [h\bar{\tau}] - \sigma_y(x, -h_0) + h\bar{Q}_y + h\bar{D}_y = \rho_1 \frac{\partial}{\partial t} [h\bar{v}_{1y}], \quad (52)$$

где $\bar{f} = \frac{1}{h} \int_{-h_0}^{\tilde{h}} f dy$. Пусть исходное статическое напряжённое состояние первой компоненты – равномерное одноосное сжатие, которое определяется как $\sigma_0, \tau_0 = 0$.

Будем искать решения в виде

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_0 + \tilde{\sigma}_x \quad \bar{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_y \quad \bar{\tau} = \tilde{\tau}. \quad (53)$$

Подставляя (53) в осреднённые уравнения движения (51) и (52), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [h\tilde{\sigma}_x] &= \tilde{\tau}(x, -h_0) - \sigma_0 \frac{\partial h}{\partial x} - h\bar{Q}_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} [h\tilde{\tau}] &= \tilde{\sigma}_y(x, -h_0) - h\bar{Q}_y. \end{aligned}$$

Отсюда находим упругую силу взаимодействия между компонентами

$$\begin{aligned} \bar{Q}_x &= -\frac{\sigma_0}{h} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \bar{Q}_y &= 0. \end{aligned}$$

Итак, из уравнений движения первой компоненты мы получили выражение силы Q .

Перейдём ко второй компоненте. Осредняя (4) по толщине слоя с учётом кинематических граничных условий на твёрдой подложке (или в приближении мелкой воды), получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \rho_2 \frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial t} - \frac{\sigma_0}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda_x \rho_2}{h_0} \bar{v}_{2x}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h\bar{v}_{2x}] &= 0. \end{aligned}$$

Осреднённое давление имеет вид $\bar{p} = -\gamma K + m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$.

В силе взаимодействия между компонентами мы оставили только скорость движения диффузионного потока, считая, что она много выше скорости движения основной структуры. Подставляя \bar{p} в первое уравнение, мы получаем два уравнения, которые определяют нашу

поверхность: $\gamma \frac{\partial K}{\partial x} - m \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial t^2} + [\frac{\sigma_0}{h} - \rho_2 g] \frac{\partial h}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial t} + \frac{\lambda_x \rho_2}{h_0} \bar{v}_{2x}$ и $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h \bar{v}_{2x}] = 0$. Отсюда при

$m = 0, \frac{\partial \bar{v}_{2x}}{\partial t} = 0$ мы получим эволюционное уравнение, описывающее диффузионный рост плёнки:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_x \rho_2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h \left[\sigma_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma h \frac{\partial K}{\partial x} \right] \right\} = 0.$$

Пренебрегая силами взаимодействия между компонентами среды, получаем в приближении мелкой воды уравнение, описывающее линейные воды на поверхности жидкости:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{h_0}{\rho_2} \left\{ \gamma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[m \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 g h \right] \right\} = 0.$$

Линейное эволюционное уравнение имеет вид

$$\frac{\lambda \rho_2}{h_0^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho_2}{h_0} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[m \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \right] + \gamma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \left[\frac{\sigma_0}{h_0} - \rho_2 g \right] \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0.$$

Таким образом, полученное уравнение поверхности позволяет описывать как диффузионный рост плёнки, вызванный упругими напряжениями, так и распространение волн на поверхности плёнки (если учитывать инерционные силы), а также их взаимное влияние.

Численные результаты. Уравнение решалось методом Галеркина. В точках спектра этого оператора происходит смена форм периодических структур, «ветвление» которых происходит с потерей устойчивости предыдущей формы на более сложную (с добавлением двух симметрично расположенных «впадин» и «бугорков»). Были проведены численные эксперименты, подтверждающие такой механизм рождения устойчивых периодических структур.

Предложенная модель качественно правильно указывает на характер потери устойчивости, ибо существование спектра точек бифуркации зависит от значений напряжений. Более того, отказ от использования химического потенциала позволяет оперировать параметром демпфирования, который может быть связан с коэффициентом диффузии. Это делает модель более определяемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукушкин, С. А. Зарождение когерентных островков при росте по механизму Странского – Крастанова, индуцированное упругими напряжениями / С. А. Кукушкин, А. В. Осипов, Ф. Шмитт, П. Хесс // Физика и техника полупроводников. – СПб.: ИПМ РАН, 2002. – Т. 36. – №. 10. – С. 1177-1184.
2. Abramowitz, M. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables Stegun I. A. / M. Abramowitz // New York: Dover Publ., Inc., 1972. – P 1044.
3. Aifants, E. C. On the problem of diffusions in solids / E. C. Aifants // Acta Mechanica. – 1980. – Vol. 37. – P. 265-296.
4. Belyaev, A. K. Stresses in pipeline affected by hydrogen / A. K. Belyaev, V. A. Polyanskiy, Yu. A. Yakovlev // Acta Mechanica. – 2012. – Vol. 223. – P. 1611-1619.
5. Indeitsev, D. A. Hydrogen embrittlement under load as a first-order phase transition / D. A. Indeitsev, E. V. Osipova // Doclady Physics. – 2009. – Vol. 51. – P. 1901-1906.
6. Indeitsev, D. A. Thermoelastic waves in a continuum with complex structure / D. A. Indeitsev, V. N. Naumov, B. N. Semenov, A. K. Belyaev // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2009. – Vol. 89. – P. 279-287.
7. Indeitsev, D. A. The phenomenon of localization of diffusion process in a dynamically deformed solid / D. A. Indeitsev, B. N. Semenov, M. D. Sterlin // Doclady Physics. 2012. – Vol. – 57. – P. 171-173.
8. Indeitsev, D. A. Mechanics of multi-component media with exchange of mass and non-classical supplies. In Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass / D. A. Indeitsev, Yu. A. Mochalova // Springer. – P. 165-194.
9. Polyanskiy, A. M. Diagnostics of mechanical condition of structural material by method of high-temperature hydrogen vacuum-extraction / A. M. Polyanskiy, V. A. Polyanskiy, D. B. Popov-Diumin // In Proceedings of the Sixth International Congress on Thermal Stresses. – Vienna, Austria, 2005. – P. 589-592.

Прокудин А. Н., Ковтаныук Л. В., Фирсов С. В.

A. N. Prokudin, L. V. Kovtanyuk, S. V. Firsov

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЗУЧЕСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

PIECEWISE LINEAR POTENTIAL FOR CREEP IN CREEP DEFORMATIONS OF A RAPIDLY ROTATING CYLINDER

Прокудин Александр Николаевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. E-mail: sunbeam_85@mail.ru.

Mr. Alexander N. Prokudin – PhD in Engineering, Leading researcher, Institute of Engineering Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk territory, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str. E-mail: sunbeam_85@mail.ru.

Ковтаныук Лариса Валентиновна – доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией необратимого деформирования Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток); 690041, Приморский край, г. Владивосток, ул. Радио, 5; тел.: + 7 (4232) 31-02-14. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Ms. Larisa V. Kovtanyuk – Dr. hab. of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok); 690041, Primorsky territory, Vladivostok, 5 Radio str.; tel.: + 7 (4232) 31-02-14. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Фирсов Сергей Викторович – аспирант Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. E-mail: firsov.s.new@yandex.ru.

Mr. Sergey V. Firsov – post-graduate student, Institute of Engineering Science and Metallurgy, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk territory, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str. E-mail: firsov.s.new@yandex.ru.

Аннотация. В статье рассматривается задача ползучести вращающегося с постоянной скоростью однородного кольцевого цилиндра. Задача решается в рамках теории малых деформаций. Для нахождения начальных условий производится решение данной задачи при упругости. Рассмотрены два случая постановки задачи: цилиндр с жёстким включением и полый цилиндр. Для описания ползучести использовался степенной закон Нортон с непрерывным потенциалом по типу Мизеса и с кусочно-линейным потенциалом. Упругое решение ищется аналитически, для ползучести используются численный метод конечных разностей. Сравнены результаты для непрерывного потенциала ползучести и для кусочно-линейного для двух вариантов граничных условий.

Summary. In article the creep problem of a uniform circular cylinder rotating at a constant speed is considered. The problem is solved within the framework of the theory of small deformations. To find the initial conditions, the solution of the given problem is performed under elasticity. Two cases of statement of the problem are considered: a cylinder with a rigid inclusion and a hollow cylinder. To describe the creep, the Norton power law with a continuous potential of the Mises type and with a piecewise linear potential was used. An elastic solution is sought analytically; a numerical finite difference method is used for creep. The results for a continuous creep potential are also compared for a piecewise-linear boundary condition for two variants.

Ключевые слова: малые деформации, упругость, ползучесть.

Key words: small deformation, elasticity, creep.

УДК 539.374



Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Введение

Вращающиеся цилиндры и диски широко применяются в авиастроении, авиакосмической промышленности, ядерной энергетике. Деформирование цилиндров происходит под действием центробежных сил, но также могут иметь место внешние нагрузки, температурные и электромагнитные поля. Исследование механического поведения вращающихся цилиндров для различных типов материалов представляет значительный интерес, ежегодно публикуется большое количество работ по этой теме. При этом чаще всего используется квазистатическая постановка и предположение о плоском деформированном состоянии в цилиндре. В простейшем случае материал цилиндра является линейно-упругим телом. Решение такой задачи входит во многие книги по теории упругости [6; 9; 19]. В работе [7] приведено универсальное решение для нелинейно упругого материала, в котором вид потенциальной энергии может быть произвольным. Подробно поведение гиперупругих вращающихся цилиндров для различных упругих потенциалов и граничных условий было исследовано в работах [11; 16]. Когда скорость вращения достигает критического значения, в цилиндре начинает развиваться пластическое течение.

На долговременную прочность вращающихся цилиндров существенное влияние оказывает ползучесть материалов. В известной монографии Ю. Н. Работнова [8] приведено решение о вращающемся диске и цилиндре с использованием экспоненциального закона ползучести. В работах [12; 13; 14] исследовалась ползучесть ортотропных цилиндров на основе степенного закона ползучести Нортона. Большое внимание уделяется явлению ползучести функционально-градиентных материалов (см. публикации [15; 17]).

Целью данной работы является исследование ползучести однородного вращающегося цилиндра с помощью кусочно-линейного степенного потенциала. Использование кусочно-линейных потенциалов является классическим подходом при решении задач теории пластичности. К таким потенциалам относятся условия пластичности Треска – Сен-Венана, Ишлинского – Ивлева, Кулона – Мора и другие. В работах [4; 5] Д. Д. Ивлев высказал идею использовать кусочно-линейные потенциалы в гидродинамике вязкой жидкости и нелинейной теории упругости. Позднее Г. И. Быковцев предложил использовать кусочно-линейные потенциалы для математического описания явления ползучести [2; 3]. Именно использование кусочно-линейного потенциала ползучести позволило получить точное решение задачи ползучести и релаксации напряжений в бесконечной пластине с первоначально круглым отверстием [1]. Данная публикация продолжает исследования, изложенные в работах [2; 3].

Постановка задачи

Рассмотрим кольцевой цилиндр с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2 . Цилиндр может иметь жёсткое включение в центре либо быть полым.

Цилиндр вращается с угловой скоростью $\omega(t)$. Считаем, что угловое ускорение мало. Введём цилиндрическую систему координат r, θ, z . Сила, действующая на диск, имеет только радиальную компоненту и равна $F_r = r\omega^2$, где ρ – плотность материала. Примем, что деформации, возникающие в цилиндре, являются малыми. Тензор малых деформаций имеет следующий общий вид:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T), \quad (1)$$

где ∇_x – оператор градиента; \mathbf{u} – вектор перемещения $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z$.

Полные деформации d_{ij} равны сумме упругих деформаций e_{ij} и деформаций ползучести p_{ij} . В условиях осевой симметрии и плоского деформированного состояния имеем

$$\begin{aligned}
 u_r &= u_r(r), u_\theta = 0, u_z = 0; \\
 e_{rr} + p_{rr} &= d_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
 e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} &= d_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \\
 e_{zz} + p_{zz} &= d_{zz} = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает производную по координате. Напряжения выражаются через упругие деформации с помощью закона Гука:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - p_{rr} \right) + \nu \left(\frac{u_r}{r} - p_{\theta\theta} \right) - \nu p_{zz} \right), \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - p_{rr} \right) + (1-\nu) \left(\frac{u_r}{r} - p_{\theta\theta} \right) - \nu p_{zz} \right), \\
 \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - p_{rr} \right) + \nu \left(\frac{u_r}{r} - p_{\theta\theta} \right) - (1-\nu) p_{zz} \right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

С учётом вышеприведённых допущений останется только одно нетривиальное уравнение равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r &= -\frac{F_r}{A} + \\
 + \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial r} \right) + \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left(\frac{p_{rr}}{r} - \frac{p_{\theta\theta}}{r} \right); & A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Видно, что если деформации ползучести отсутствуют, то предыдущее уравнение сводится к уравнению Навье. Скорости деформации ползучести определяются следующим законом:

$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial C}{\partial \sigma_{ij}}$, где C – потенциал ползучести. Запишем потенциал C в соответствии со степенным законом ползучести Нортон:

$$C = B \Sigma^n, \tag{5}$$

где B, n – параметры материала, определяемые экспериментально; Σ – эквивалентное напряжение.

Обычно Σ выбирается в виде эквивалентного напряжения по Мизесу:

$\Sigma_1 = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2}}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения; $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – гидростатическое напряжение.

Поскольку в нашем случае в тензоре напряжений присутствуют только диагональные компоненты, предыдущее выражение можно преобразовать к виду

$$\Sigma_1 = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{zz}}.$$

Кусочно-линейный потенциал ползучести, для которого эквивалентное напряжение $\Sigma_2 = \max|\sigma_i - \sigma_j|$, предложил использовать Г. И. Быковцев [2; 3]. Потенциалы в формуле (6), соответствующие Σ_1 и Σ_2 , в дальнейшем будем обозначать как C_1 и C_2 . Для потенциала C_1 можно получить явное выражение для скоростей деформаций ползучести:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= \frac{Bn\Sigma_1^{n-2}}{2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{\theta\theta} &= \frac{Bn\Sigma_1^{n-2}}{2} (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{zz} &= \frac{Bn\Sigma_1^{n-2}}{2} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}). \end{aligned} \quad (6)$$

Для потенциала C_2 уравнения для скоростей пластических деформаций будут иметь разный вид в зависимости от соотношения между величинами напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$. Уравнения в главных напряжениях имеют следующий вид:

Если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то

$$\dot{p}_1 = Bn\Sigma_1^{n-1}; \dot{p}_2 = 0; \dot{p}_3 = -Bn\Sigma_1^{n-1}. \quad (7)$$

Если $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$, то

$$\dot{p}_1 = \frac{Bn\Sigma_1^{n-1}}{2}; \dot{p}_2 = \frac{Bn\Sigma_1^{n-1}}{2}; \dot{p}_3 = -Bn\Sigma_1^{n-1}. \quad (8)$$

Если $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, то

$$\dot{p}_1 = Bn\Sigma_1^{n-1}; \dot{p}_2 = -\frac{Bn\Sigma_1^{n-1}}{2}; \dot{p}_3 = -\frac{Bn\Sigma_1^{n-1}}{2}. \quad (9)$$

Начальные и граничные условия задачи. В начальный момент времени перемещения, напряжения и необратимые деформации в среде отсутствуют. Если цилиндр имеет жёсткое включение в центре, то тогда на внутренней поверхности цилиндра $r = R_1$ задано перемещение, а на внешней $r = R_2$ – напряжение:

$$u_r(R_1) = 0, \sigma_{rr}(R_2) = 0. \quad (10)$$

Для полого цилиндра и на внутренней и внешней поверхностях задаются напряжения:

$$\sigma_{rr}(R_1) = 0, \sigma_{rr}(R_2) = 0. \quad (11)$$

Упругое решение

Если в цилиндре отсутствуют деформации ползучести, то тогда уравнение (4) сводится к уравнению Навье, его общее решение имеет вид

$$u_r = \frac{C_1}{r} + C_2 r - \frac{1}{8} \frac{\rho r^3 \omega^2}{A}. \quad (12)$$

При этом значения постоянных C_1 и C_2 для цилиндра с жёстким включением имеют вид

$$C_1 = -\frac{\rho R_1^2 R_2^2 (R_1^2 + (2\nu - 3) R_2^2) \omega^2}{8A((2\nu - 1) R_1^2 - R_2^2)}, C_2 = \frac{\rho((2\nu - 1) R_1^4 + (2\nu - 3) R_2^4) \omega^2}{8A((2\nu - 1) R_1^2 - R_2^2)}. \quad (13)$$

Для полого цилиндра C_1 и C_2 имеют такой вид:

$$C_1 = \frac{p(2\nu - 3) R_1^2 R_2^2 \omega^2}{8A(2\nu - 1)}; C_2 = -\frac{p(2\nu - 3)(R_1^2 + R_2^2) \omega^2}{8A}. \quad (14)$$

Численная схема

Для численного решения уравнения (5) воспользуемся методом конечных разностей. Построим в области деформирования (R_1, R_2) равномерную сетку из k -узлов с координатами r_0, r_1, \dots, r_{k-1} . Узел с номером 0 соответствует левой границе области, а с номером $k-1$ – правой границе. Шаг сетки обозначим как Δr .

Выражение для Δr имеет вид

$$\Delta r = \frac{R_2 - R_1}{n - 1}. \quad (15)$$

Координату i -го узла можно найти следующим образом:

$$r_i = R_1 + i \cdot \Delta r. \quad (16)$$

Процесс деформирования разобьём на l временных шагов продолжительности Δt .

Значение некоторой неизвестной функции в узловых точках будем обозначать как $y^{i,j}$, где i – номер узла, а j – номер временного шага. Считаем, что шаг $j=0$ соответствует упругому решению. Для аппроксимации пространственных переменных будем применять центральные шаблоны аппроксимации 2-го порядка точности:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \cong \frac{y^{i-1,j} - 2y^{i,j} + y^{i+1,j}}{\Delta r^2}, i=1..k-2, j=1..l; \frac{\partial y}{\partial r} \cong \frac{y^{i+1,j} - y^{i-1,j}}{2\Delta r}, i=1..k-2, j=1..l. \quad (17)$$

Результаты расчётов

Рассмотрим следующие значения параметров задачи:

$R_1 = 0,02 \text{ м}, R_2 = 0,1 \text{ м}; E = 210 \cdot 10^9 \text{ Па}, \nu = 0,38; B = 4,1 \cdot 10^{-22}, n = 3; \omega = 1600; \rho = 7,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$
 $k = 1000, l = 8000, \Delta t = 0,1 \text{ с}.$

Перейдём к рассмотрению процесса ползучести в цилиндре. Для удобства будем оценивать необратимые деформации с помощью следующего инварианта тензора деформаций ползучести:

$$P_2 = \sqrt{p_{rr}^2 + p_{\theta\theta}^2 + p_{zz}^2 - p_{rr}p_{\theta\theta} - p_{\theta\theta}p_{zz} - p_{rr}p_{zz}}.$$

На рис. 1 показаны перемещения в цилиндре с жёстким включением для моментов времени $t = 0, 400, 800 \text{ с}$. Видим, что для потенциалов C_1 и C_2 получены близкие результаты.

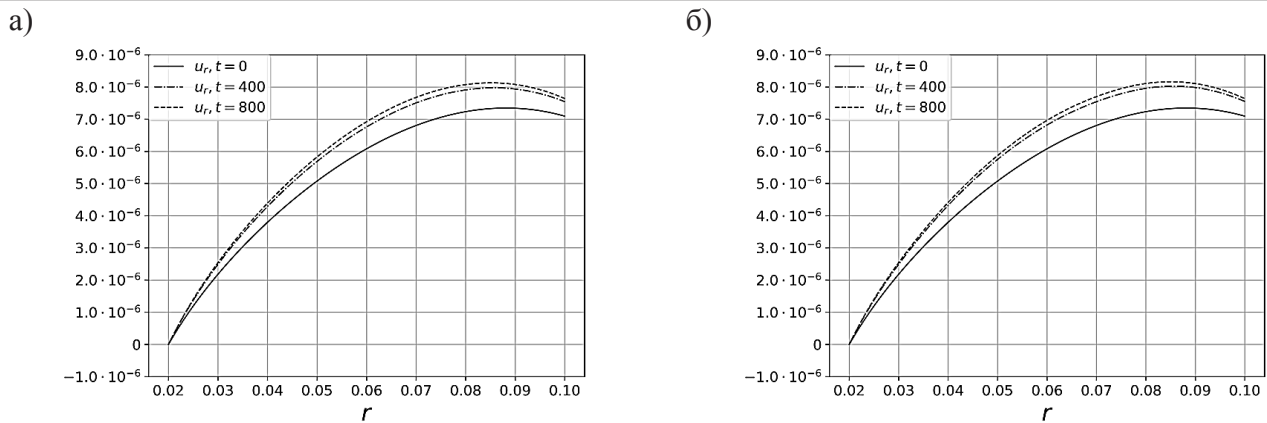


Рис. 1. Перемещения в цилиндре с жёстким включением с учётом ползучести материала: а – потенциал C_1 ; б – потенциал C_2

Иная картина (см. рис. 2) наблюдается в полом цилиндре: использование кусочно-линейного потенциала C_2 приводит к существенному увеличению перемещений.

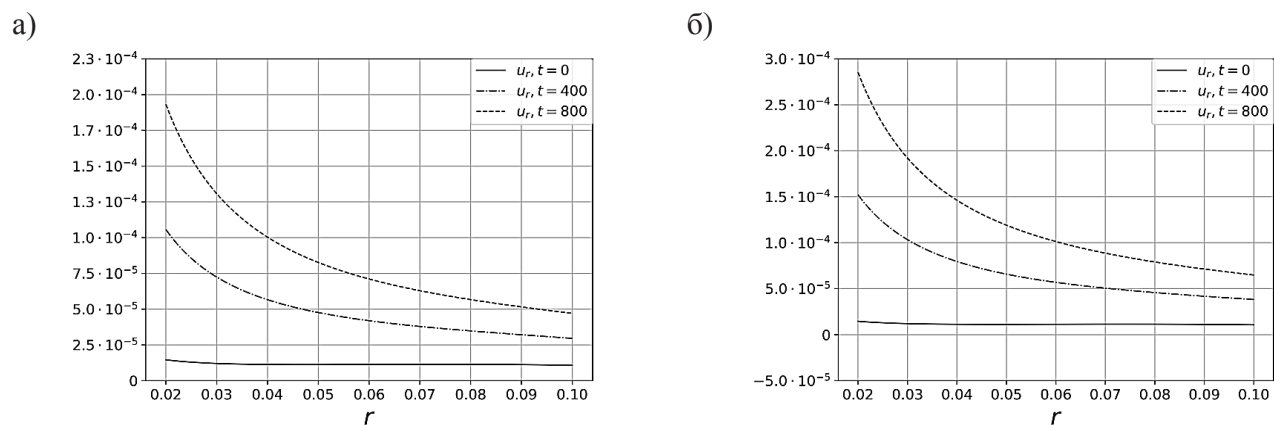


Рис. 2. Перемещения в полом цилиндре с учётом ползучести материала: а – потенциал C_1 ; б – потенциал C_2

Аналогичная закономерность наблюдается и для необратимых деформаций (см. рис. 3, 4).

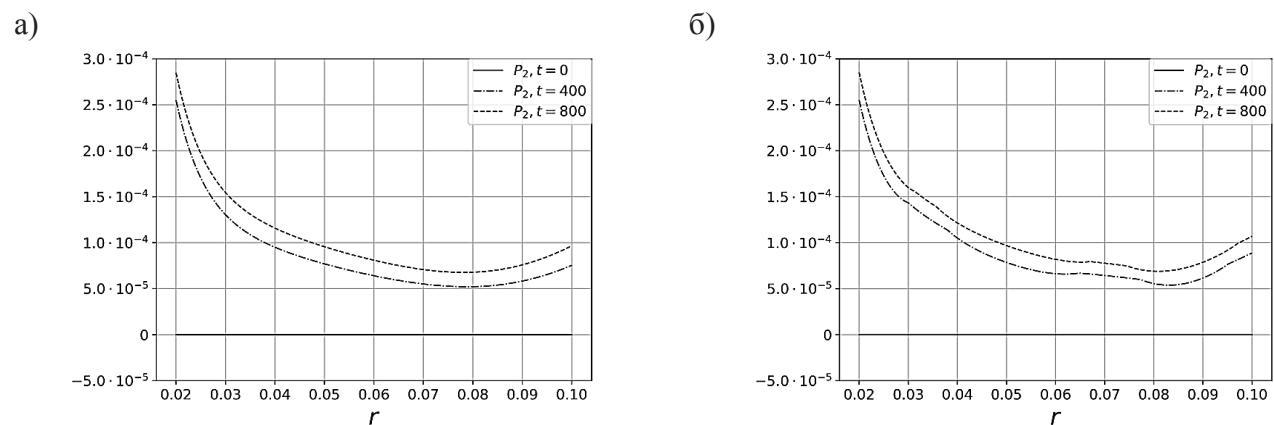


Рис. 3. Инвариант P_2 в цилиндре с жёстким включением с учётом ползучести материала: а – потенциал C_1 ; б – потенциал C_2

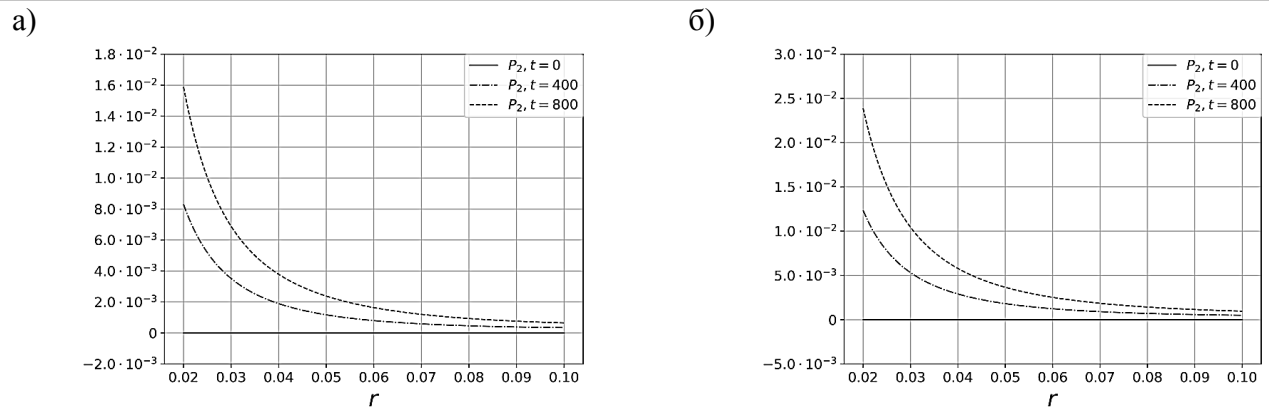


Рис. 4. Инвариант P_2 в полом цилиндре с учётом ползучести материала:
а – потенциал C_1 ; б – потенциал C_2

Оценим напряжения, возникающие в ходе ползучести материала. На рис. 5 и 6 представлены графики инварианта Σ_1 . Напряжения в цилиндре слабо зависят от типа используемого потенциала C_1 или C_2 и со временем снижаются. Это справедливо и для цилиндра с жёстким включением, и для полого цилиндра.

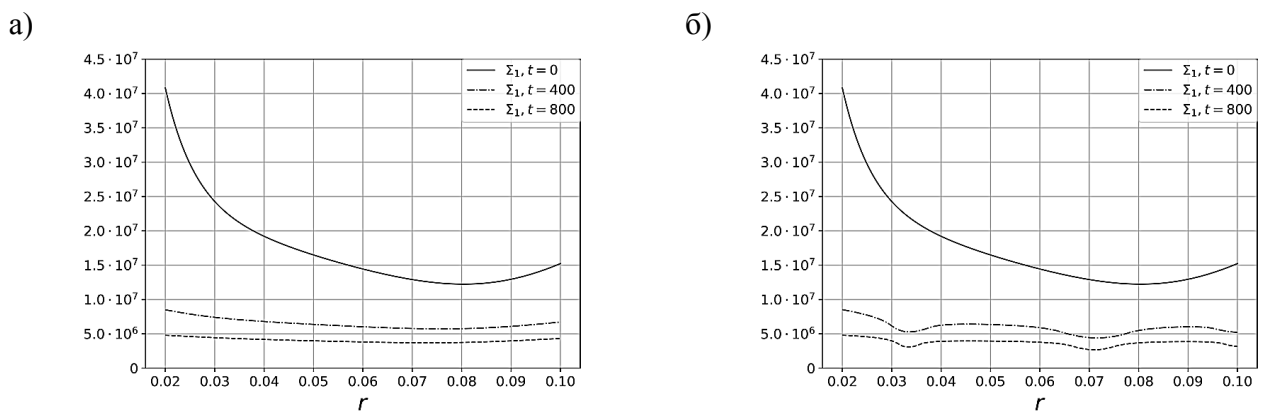


Рис. 5. Напряжения Σ_1 в цилиндре с жёстким включением с учётом ползучести материала:
а – потенциал C_1 ; б – потенциал C_2

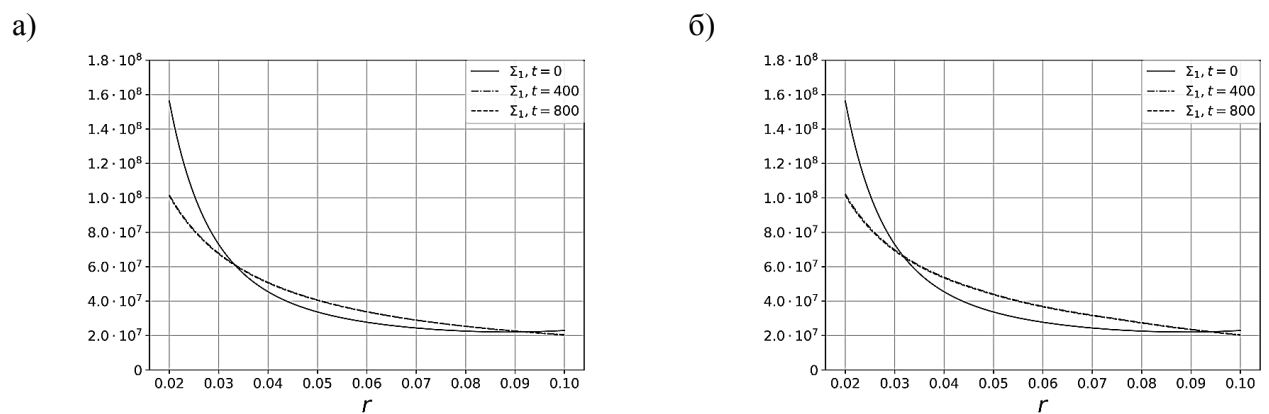


Рис. 6. Напряжения Σ_1 в полом цилиндре
с учётом ползучести материала: а – потенциал C_1 ; б – потенциал C_2



ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин, А. А. Плоское напряжённое состояние в условиях нелинейной неустановившейся ползучести / А. А. Буренин, В. М. Ярушина // Дальневосточный математический журнал. Владивосток: Институт прикладной математики Дальневосточного отделения академии наук. – 2002. – Т. 3. – № 1. – С. 64-78.
2. Быковцев, Г. И. Кусочно-линейные потенциалы в нелинейной механике / Г. И. Быковцев, Н. Г. Быковцева // Доклады Академии наук. – 1994. – Т. 335. – № 3. – С. 310-312.
3. Быковцев, Г. И. Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов / Г. И. Быковцев, В. М. Ярушина // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций: сборник научных трудов. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – С. 9-26.
4. Ивлев, Д. Д. К построению гидродинамики вязкой жидкости / Д. Д. Ивлев // Доклады Академии наук СССР. – 1960. – Т. 135. – № 2. – С. 280-282.
5. Ивлев, Д. Д. Построение теории упругости / Д. Д. Ивлев // Доклады Академии наук СССР. – 1961. – Т. 138. – № 6. – С. 1321-1324.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 7. Теория упругости: учеб. пособие для вузов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 264 с.
7. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
8. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
9. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 576 с.
10. Arslan, E. The rotating elastic-plastic hollow shaft conveying a hot medium / E. Arslan, W. Mack, A. N. Eraslan // Forsch Ingenieurwes. – 2010. – Vol. 74. – № 1. – P. 27-39.
11. Bagheri, A. On the behavior of rotating thick-walled cylinders made of hyperelastic materials / A. Bagheri, D. Taghizadeh, H. Darijani // Meccanica. – 2016. – Vol. 51. – № 3. – P. 673-692.
12. Bhatnaga, N. S. Creep Analysis of Orthotropic Rotating Cylinder / N. S. Bhatnaga, V. K. Arya, K. K. Debnath // J. Pressure Vessel Technol. – 1980. – Vol. 102. – № 4. – P. 371-377.
13. Bhatnagar, N. S. Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder / N. S. Bhatnagar, P. S. Kulkarni, V. K. Arya // Nuclear Engineering and Design. – 1984. – Vol. 83. – № 3. – P. 379-388.
14. Bhatnagar, N. S. Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains / N. S. Bhatnagar, P. S. Kulkarni, V. K. Arya // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 1986. – Vol. 21. – № 1. – P. 61-71.
15. Bose, T. Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc / T. Bose, M. Rattan // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2018. – Vol. 67. – P. 169-176.
16. Chadwick, P. The deformation of rubber cylinders and tubes by rotation / P. Chadwick, C. F. M. Creasy, V. G. Hart // The ANZIAM Journal. – 1977. – Vol. 20. – № 1. – P. 62-96.
17. Mangal, S. K. Steady-State Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Cylinder / S. K. Mangal, N. Kapoor, T. Singh // Strain. – 2013. – Vol. 49. – № 6. – P. 457-466.
18. Nadai, A. Theory of Flow and Fracture of Solids / A. Nadai. – McGraw Hill, 1950. – Volume One. – 572 p.
19. Sadd, M. H. Elasticity: theory, applications, and numerics. Third edition / M. H. Sadd. – Amsterdam; Boston: Elsevier/AP, Academic Press is an imprint of Elsevier, 2014. – 582 p.

Лошманов А. Ю., Сиротин А. А., Хромов А. И.
A. Yu. Loshmanov, A. A. Sirotin, A. I. Khromov

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

DEFORMATION CONDITIONS OF COMPRESSED HARD-PLASTIC BODIES

Лошманов Антон Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: loshmanov@kmscom.ru.

Mr. Anton Yu. Loshmanov – PhD in Physics and Mathematics, Associate professor, Applied Mathematics and Information Technology Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: loshmanov@kmscom.ru.

Сиротин Антон Алексеевич – старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: pmi@knastu.ru.

Mr. Anton A. Sirotin – senior lecturer, Applied Mathematics and Information Technology Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: pmi@knastu.ru.

Хромов Александр Игоревич – заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: khromovai@list.ru.

Mr. Alexander I. Khromov – Honored Scientist of the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Applied Mathematics and Information Technology Department, Komsomolsk-on-Amur State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 27 Lenin str. E-mail: khromovai@list.ru.

Аннотация. В работе рассматривается описание достижения предельного состояния упрочняющихся жёсткопластических тел на основании гипотезы об определении достижения такого состояния исчерпанием пластических свойств материала. Представлены поверхности деформационных состояний и описаны предельные состояния для пластически сжимаемых жёсткопластических сред; выведены соотношения, позволяющие построить линии, определяющие деформирование образцов при плоской деформации.

Summary. The paper describes possessing limiting state of hardening rigid-plastic bodies proceeding from the hypothesis that such a state could be possessed by the exhaustion of the plastic properties of the material. The surfaces of deformation states for plastically compressible rigid-plastic media are presented, limiting states for plastically compressible rigid-plastic media are described, and relationships are derived that allow constructing lines that deform the samples under planar deformation.

Ключевые слова: предельное состояние, упрочнение, жёсткопластическое тело, пластические свойства, сжимаемый материал, критерий хрупкости.

Key words: ultimate state, hardening, rigid-plastic body, plastic properties, compressible material, criterion of brittleness.

УДК 639.3

Деформационные состояния и разрушение несжимаемых жёсткопластических тел рассматривались в работах [1 – 4]. Необходимость определения поверхности деформационных состояний определяется возможностью описания предельных состояний упрочняющихся жёсткопластических тел. Это описание связывалось с гипотезой Серенсена о том, что достижение предельного

состояния определяется исчерпанием пластических свойств материала, то есть при достижении предельного состояния материал не может деформироваться непрерывно, а пластическое течение его возможно только при наличии разрывов поля скоростей перемещений. Подход, рассматриваемый ниже, обобщается на случай пластически сжимаемого материала.

Поверхности деформационных состояний для пластически сжимаемых жёсткопластических сред

Поверхность деформационных состояний связана с формулировкой закона сохранения массы в виде уравнения неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho V_{\kappa,\kappa} = 0 \text{ или } V_{\kappa,\kappa} = -\frac{d}{dt} [\ln \rho], \quad (1)$$

где ρ – плотность материала; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}}$ – материальная производная; V_{κ} – скорость перемещения частиц материала. Примем за меру деформаций тензор конечных деформаций Альманси:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_{\kappa}}{\partial x_i} \frac{\partial X_{\kappa}}{\partial x_j} \right). \quad (2)$$

Компоненты тензора скоростей деформации определяются в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

Здесь X_i, x_i – соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты частиц материала.

Тензоры E_{ij} и ε_{ij} связаны соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{i\kappa} \frac{\partial V_{\kappa}}{\partial x_j} + E_{j\kappa} \frac{\partial V_{\kappa}}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

Рассмотрим поле скоростей вида [1]:

$$V_1 = x_1 \varepsilon_1(t), V_2 = x_2 \varepsilon_2(t), V_3 = x_3 \varepsilon_3(t), \quad (5)$$

которое задаёт простой тип нагружения, когда тензоры деформаций и скоростей деформаций предполагаются соосными. Согласно (5) компоненты тензора скоростей деформаций определяются в виде $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_3(t)$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$, то есть $\varepsilon_i(t)$ – главные значения тензора скоростей деформаций в выбранной декартовой системе координат. Уравнение (1) примет следующий вид:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{d}{dt} [\ln \rho]. \quad (6)$$

С учётом поля скоростей (5) соотношения (4) примут такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{11}}{dt} &= (1 - 2E_{11}) \varepsilon_1(t), \\ \frac{dE_{22}}{dt} &= (1 - 2E_{22}) \varepsilon_2(t), \\ \frac{dE_{33}}{dt} &= (1 - 2E_{33}) \varepsilon_3(t). \end{aligned} \quad (7)$$

После интегрирования и суммирования выражения (7) преобразуются к виду

$$\ln(1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3) = 2\ln\rho - 2\ln\rho_0 = 2\ln\frac{\rho}{\rho_0}, \quad (8)$$

где ρ_0 – начальная плотность материала. Из (8) следует, что

$$(1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (9)$$

При $\rho = \rho_0$ уравнение (9) будет определять в пространстве главных деформаций (E_1, E_2, E_3) поверхность деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела, рассматриваемой в работах [1 – 4].

Уравнение (9) может быть записано через основные инварианты тензора конечных деформаций Альманси:

$$1 - 2I_E + 4\Pi_E - 8\Pi\Pi_E = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (10)$$

Уравнения (10) задают деформационные состояния пластически сжимаемого тела в виде семейства плоскостей, квадрат расстояния которых от начала координат определяется относительным изменением плотности материала в процессе пластического деформирования.

1. Предельные состояния для пластически сжимаемых жёсткопластических сред

Введение поверхностей деформационных состояний позволяет интерпретировать предельные состояния в виде линий на этих поверхностях. Предельные состояния пластических сред связываются, как правило, с качественным изменением процесса деформирования пластического тела. Такие характерные качественные изменения традиционно вводятся при рассмотрении одноосного растяжения плоских и цилиндрических образцов и связаны с тремя этапами [5]:

- 1) растяжением образца до момента образования шейки (до этого этапа материал ведёт себя практически как пластически несжимаемый);
- 2) образованием шейки и зарождением пор в материале (считается, что на этом этапе материал можно считать сжимаемым);
- 3) объединением пор в общую макротрещину, что собственно связано с разрушением материала.

Такому подходу соответствуют два вида предельных состояний пластических сред:

- 1) состояние перехода пластически несжимаемого материала в пластически сжимаемое;
- 2) образование макротрещины, связанное с объединением пор.

Полученное соотношение (10) позволяет ввести критерий разрушения материала по предельной плотности. При этом первое предельное состояние будет определяться соотношением $\frac{\rho}{\rho_0} = \bar{\rho} = 1$. И этому будет соответствовать некоторая плоскость (см. рис. 1).

Второе предельное состояние определяется соотношением $\bar{\rho} = \rho^*$. Этому будет соответствовать плоскость в пространстве основных инвариантов тензора деформаций, параллельная плоскости, определяющей первое предельное состояние.

Указанную величину (ρ^*) можно определить из диаграммы нагружения образцов для конкретных материалов в условиях плоской деформации, осесимметричной деформации и плоского напряжённого состояния как деформированные состояния, соответствующие σ_B . Описание деформирования образцов в указанных условиях рассмотрены в работах [6 – 13].

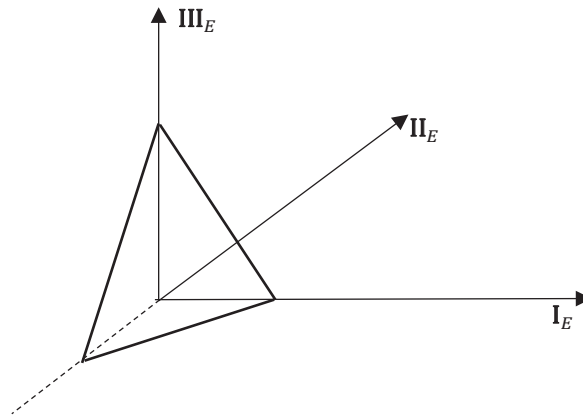


Рис. 1. Поверхность деформационных состояний

Деформация в условиях плоской деформации определяется следующими соотношениями:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\bar{\varepsilon} + 1)^2}, \quad E_2 = e - g = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^2 - \bar{\varepsilon}, \quad \text{где } \bar{\varepsilon} \text{ – относительное удлинение образца.}$$

Деформация в условиях осесимметричной деформации определяется следующими соотно-

шениями: $E_1 = e + g = \frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}(2 + \bar{\varepsilon})}{(1 + \bar{\varepsilon})^2}$, $E_2 = e - g = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}$, $E_3 = r^2 E_{\text{фп}} = -\frac{1}{2} \bar{\varepsilon}$, а в условиях плоского

напряжённого состояния

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{-1/\sqrt{2}}}{2}, \quad E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{\sqrt{2}}}{2},$$

$$E_3 = -1 + \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{-1/\sqrt{2}}}{2} + \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{\sqrt{2}}}{2}.$$

Эти соотношения позволяют построить линии, определяющие деформирование образцов при плоской деформации, осесимметричной деформации и плоском напряжённом состоянии в пространстве основных инвариантов тензора конечных деформаций. Указанные зависимости получены в предположении пластической несжимаемости материалов. Конечной точке этих линий соответствует разрушение образцов. Заметим, что эти точки должны находиться на определённой поверхности, определяемой уравнением (10).

2. Условие пластичности Мизеса – Шлейхера

Условие пластичности Мизеса – Шлейхера можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} + \beta \sigma = k, \quad (11)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – среднее гидростатическое давление. Используя ассоциированный закон

пластического течения $\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ и условие пластичности (11), найдём:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} + \frac{\lambda\beta}{3}.$$

Складывая полученные выражения и приводя подобные слагаемые, получим следующее:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \lambda\beta. \quad (12)$$

Учитывая (1) и (3), из (12) можно получить $V_{к,к} = \lambda\beta$ и $\beta = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt} [\ln \rho]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочеров, Е. П. Деформационные состояния и разрушение идеальных жёсткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2006. – № 42. – С. 66-71.
2. Хромов, А. И. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жёсткопластического тела / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Вестник Самарского государственного технического университета. Физико-математические науки. – 2006. – № 43. – С. 88-91.
3. Хромов, А. И. Деформационные состояния и условия разрушения жёсткопластических тел / Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 413. – № 4. – С. 481-485.
4. Буханько, А. А. Деформационно-энергетический критерий разрушения жёсткопластических тел / А. А. Буханько, А. Л. Григорьева, Е. П. Кочеров, А. И. Хромов // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2009. – № 6. – С. 178-186.
5. Бобылев, А. В. Механические и технологические свойства металлов: справочник / А. В. Бобылев. – М.: Металлургия, 1987. – 208 с.
6. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения / А. И. Хромов // Математика. Механика. Информатика: труды конференции, посвящённой 10-летию РФФИ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – С. 403-420.
7. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел. Константы разрушения / А. И. Хромов, О. В. Козлова // Владивосток: Дальнаука, 2005. – 159 с.
8. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // Доклады Академии наук. – 2006. – Т. 407. – № 6. С. 777-781.
9. Хромов, А. И. Разрушение жёсткопластических тел, константы разрушения // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2005. – № 3. – С. 137-152.
10. Козлова, О. В. Константы разрушения для идеальных жёсткопластических тел / О. В. Козлова, А. И. Хромов // Доклады Академии наук. – Т. 385. – № 3. – 2002. – С. 342-345.
11. Григорьева, А. Л. Одноосное растяжение жёсткопластической полосы в условиях плоского напряжённого состояния при однородном поле скоростей деформаций / А. Л. Григорьева, А. И. Хромов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2015. – № 4(26). – С. 198-205.
12. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жёсткопластической полосы при растяжении / А. И. Хромов // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 1. – С. 136-142.
13. Хромов, А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жёсткопластических тел / А. И. Хромов // Доклады Академии наук. – 1998. – Т. 362. – № 2. – С. 202-205.



В. В. Предеин
V. V. Predein

ОСОБЕННОСТИ РЕГИСТРАЦИИ ТЕРМОВРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ АЛЮМОТЕРМИТНОМ ПОЛУЧЕНИИ РАСПЛАВА

THERMAL CHARACTERISTICS REGISTRATION WHEN ALUMINOTHERMY MELT OBTAINING

Предеин Валерий Викторович – младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallургов, 1; тел.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: predein3@mail.ru.

Mr. Valery V. Predein – Junior researcher, Institute of Machinery and Metallurgy, Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681005, Khabarovsk region, Komsomolsk-on-Amur, 1 Metallurgists' str.; tel.: +7 (4217) 54-95-39. E-mail: predein3@mail.ru.

Аннотация. Применение алюмотермических процессов в производстве позволяет в значительной степени экономить ресурсы, сокращать время технологического цикла получения или обработки металлоизделий, улучшать результат производственных операций и, в ряде случаев, в зависимости от применяемых материалов, эффективно перерабатывать металлоотходы машиностроительных и металлургических предприятий. В литературе исследованы различные направления применения термитных смесей, однако есть вопросы, которые сдерживают более широкое распространение алюмотермии на производстве. Одним из таких вопросов является контроль температур продуктов экзотермической реакции как непосредственно в процессе её прохождения, так и в процессе выдержки, разливки сплавов и заливки форм. В работе рассматриваются практические аспекты осуществления контроля температур косвенным методом, с поверхности тигля и формы.

Summary. The use of aluminothermy processes in production allows significantly saving resources, shortening the time of the technological cycle for obtaining or processing metal products, improving the result of production operations and, in some cases, depending on the materials used, efficiently processing metal waste of machine-building and metallurgical enterprises. In the scientific research works, various applications of thermit mixture have been investigated, but there are issues that hamper the wider distribution of aluminothermy in production. One of such issues is the temperature control of the products of the exothermic reaction both during its passage, and during alloy holding and casting, and pouring molds. The aspects of temperature control by indirect methods, from the surface of the crucible and the shape are considered in the work.

Ключевые слова: алюмотермия, термитная смесь, тигель, форма, температура, металлоотходы, контроль, экзотермическая реакция.

Key words: aluminothermy, thermit mixture, crucible, form, temperature, metal waste, control, exothermic reaction.

УДК 669.094.2-926.62

Введение

Применение алюмотермии для получения изделий целиком из железоуглеродистых сплавов, образующихся в результате экзотермических реакций в термитных смесях, требует тщательного контроля факторов, влияющих на химический состав и свойства литых заготовок [1 – 5]. Контроль температур продуктов, образующихся в ходе экзотермической реакции на стадиях выдержки металла, его разливки и заливки в формы, позволяет обеспечить необходимые свойства сплавов. Регистрация температурных параметров процесса является одной из сложных задач при получении литых заготовок из расплавов, образующихся в результате алюмотермии. Экзотермические реакции характеризуются высокими температурами (выше 2500 °С), что делает невозмож-

ным напрямую использовать контактные методы замера реальных температур термопарами (предел измерения которых для самых термостойких, как, например, вольфрамрениевых, кратко- временно ограничивается 2500 °С) [6; 7]. Не дают адекватных результатов и косвенные методы оценки температуры, например, пирометрами с поверхности расплава или термопарами с поверхности тигля вследствие покрытия металла толстым слоем шлака, а также быстрого изменения температуры в зоне горения. Отмеченные проблемы обуславливают необходимость проведения экспериментов без контроля температуры в тигле при соблюдении прочих равных параметров. Свойства получаемых образцов констатируются по факту влияния начальных температурных параметров шихты и формы перед заливкой и не связываются с температурами реакции и разлива [8; 9; 10].

Цели и задачи исследования

Целью работы является изучение возможности косвенной регистрации температур с поверхности тигля и формы при изменяющихся их начальных температурах. Для реализации цели решалась задача проведения измерений температур на поверхности тигля и формы в ходе экзотермической реакции при изменении температуры предварительного нагрева системы «тигель с термитной смесью – форма».

Методы и материалы

Экзотермические реакции проводили в огнеупорных тиглях, выполненных из материала графитированного электрода марки ЭГ15. После прохождения реакции и выдержки расплава в тигле в течение 10 секунд для обеспечения разделения металла и шлака металл сливается в форму. Перед проведением экспериментов огнеупорная оснастка нагревается до значения температуры, равного 150 °С, и покрывается противопопригарной краской.

В качестве восстановителя использовали смесь алюминиевых сплавов, применяемых в авиастроении в виде крупки фракции 0,2...1,5 мм следующего химического состава: Al = 89,443 %; Mn = 0,304 %; Si = 1,097 %; Cr = 0,062 %; Ni = 0,008 %; Cu = 2,040 %; Fe = 0,166 %; Mg = 3,917 %; Zn = 2,961 %. Окалина применялась также в виде крупки фракции 0,2...1,5 мм и имела следующий химический состав: C = 0,150 %; Mn = 1,188 %; Si = 2,960 %; S = 0,030 %; P = 0,030 %; Fe = 71,500 %; Al = 0,697 %; Ni = 0,188 %; Cr = 0,173 %; Cu = 0,444 %; O₂ = 22,639 %.

Регистрация температуры на поверхности тигля и формы осуществлялась при помощи прибора Термодат-29М5 с контроллером температур на 24 выхода и комплекта термопар ТП.ХА(К)-К12.Н.1,2-1-2.

Основная часть

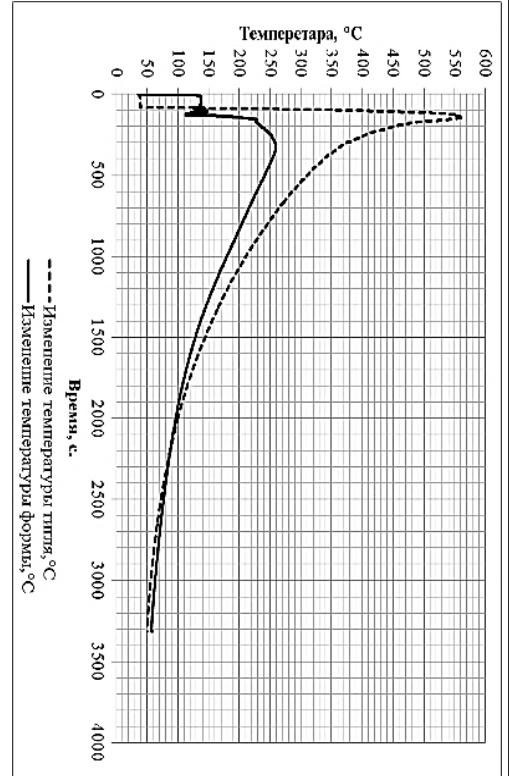
Температуры образующихся продуктов реакций зависят от свойств исходных компонентов термитных смесей, качества их подготовки и свойств огнеупорной оснастки. Начальная температура тигля со смесью влияет на выход расплава, интенсивность прохождения реакции, химический состав металла. Таким образом, при изменении начальных температур формы и шихты меняется соотношение шлаковой и металлической фаз, химический состав и выход железоуглеродистого сплава.

Экспериментами установлено, что максимум температур на поверхности тигля достигается после прохождения реакции выдержки и слива расплава в форму [11; 12]. На задержку регистрации температурных максимумов оказывают влияние теплофизические свойства материалов тигля, они же позволяют определить температурный пик внутри реактора. В большинстве случаев предельная температура на поверхности обеспечивается не всем объемом продуктов реакции, а лишь частью оставшегося шлака. В ряде случаев шлак сливается частично, или металл может оставаться в тигле, что оказывает влияние на температуру поверхности тигля. Интенсивность реакции также влияет на формирование температурных пиков. Чем выше интенсивность, тем меньше время контакта продуктов реакции и огнеупорной оснастки. Это влияет на снижение пика температур на поверхности тигля. Однако температура продуктов реакции может быть выше.

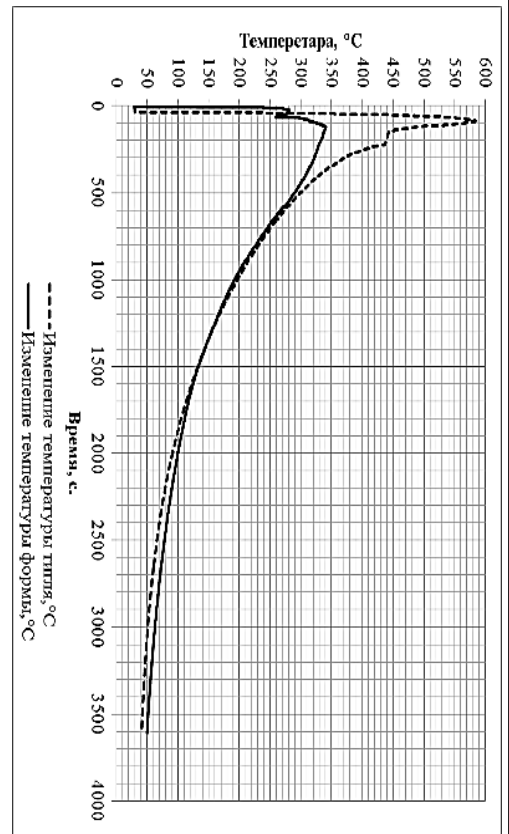
На рис. 1 представлены зависимости изменения температур тиглей и форм в местах установки термопар при проведении экзотермических реакций с использованием смесей при соответствующих температурах оснастки. Кривые, характеризующие изменение температур поверхности

тигля, имеют схожую динамику и максимальные показатели значений температур, равных 540...580 °С и не зависят от начальной температуры шихты.

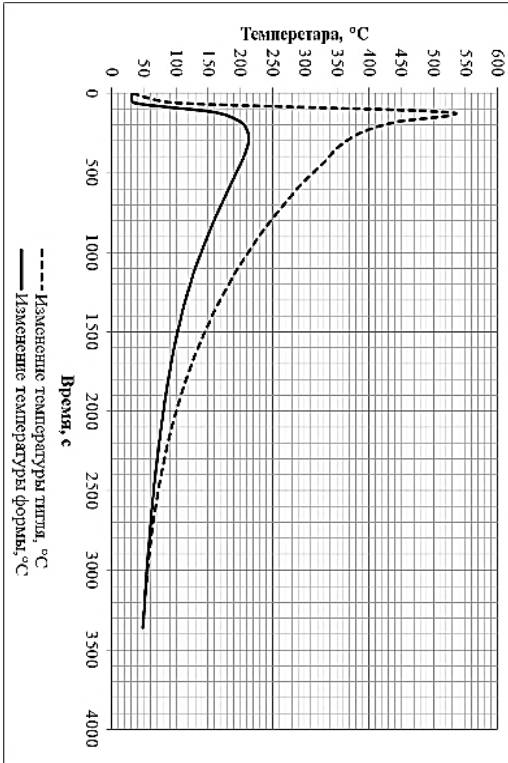
а)



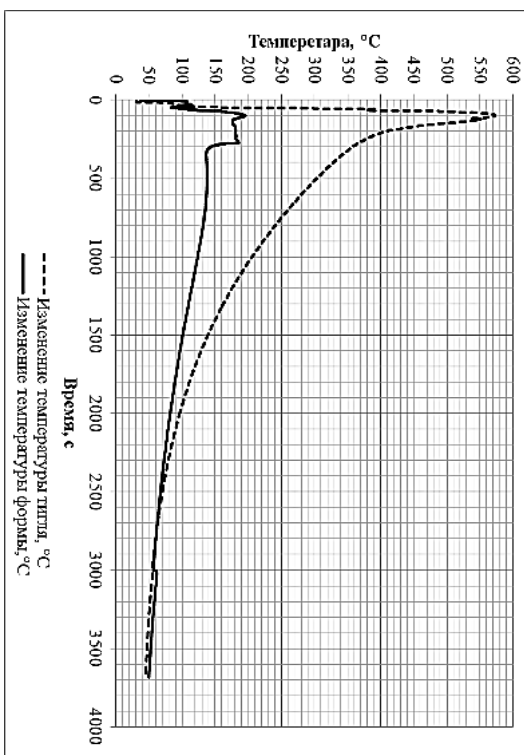
б)



в)



г)



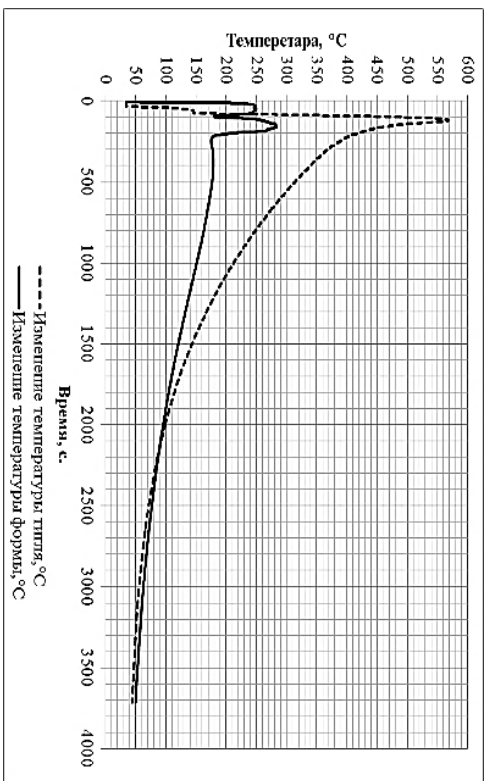
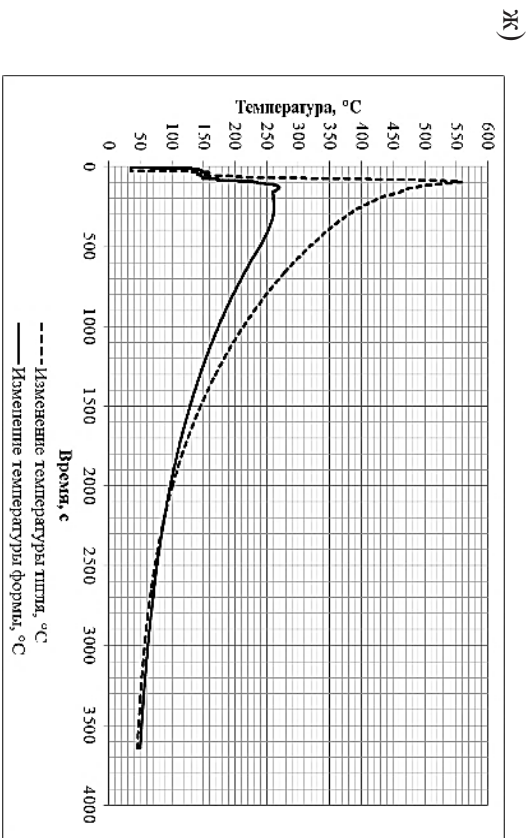
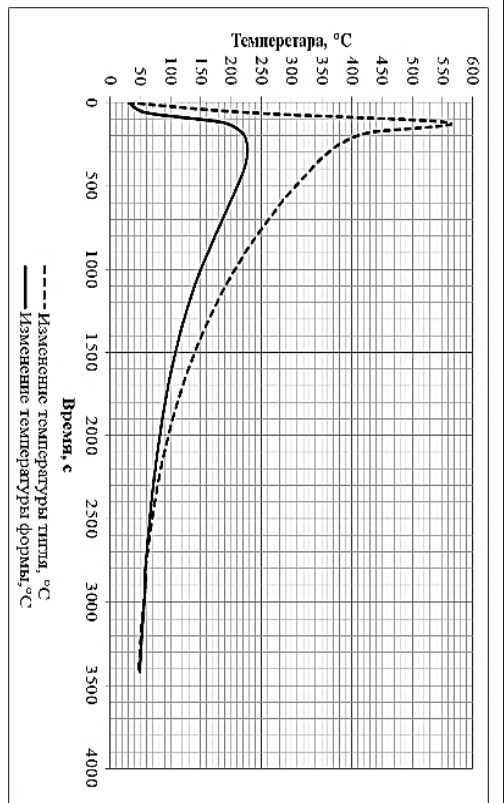
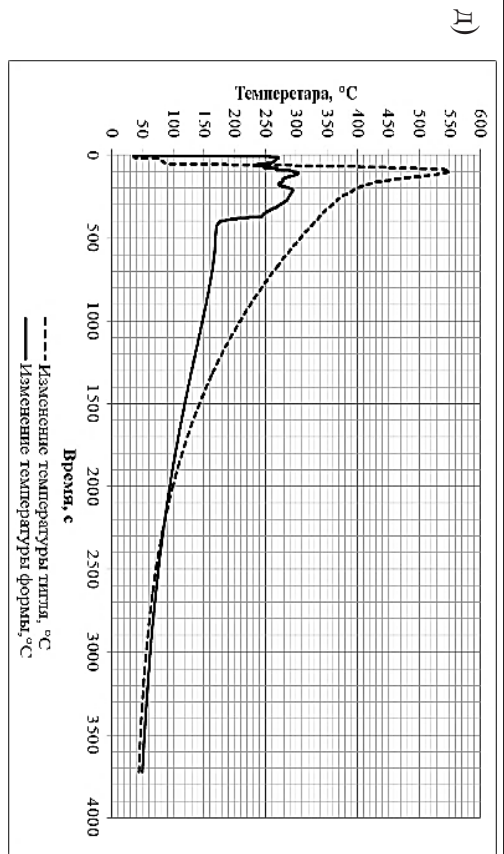


Рис. 1. Зависимость изменения температуры в местах установки термомпар на поверхности тигля и формы:
 а – 25/200 °С; б – 25/400 °С; в – 200/25 °С; г – 200/200 °С; д – 200/400 °С; е – 400/25 °С; ж – 400/200 °С; з – 400/400 °С



Выводы

Проведённые замеры температур на поверхности тигля и формы при интервале изменения начальных температур шихты и формы 25...400 °С показали следующее: изменение температур поверхности огнеупорной оснастки имеет схожие динамику и показатели в интервале 540...580 °С вне зависимости от начального значения температуры шихты. Это свидетельствует об отсутствии возможности провести корректно интерпретацию и сопоставление полученных данных. Представляется крайне затруднительным связать полученные данные со свойствами сплавов. Косвенно, в качестве сравнения, можно свойства сплавов «привязать» к пиковым значениям температур формы и продолжительности охлаждения до определённых температур. Однако при каждом режиме изменяются скорость прохождения реакции, химический состав и свойства сплавов, количество металлической фазы и скорость её разлива, температурные параметры продуктов реакции. При этом изменяются теплоёмкость и теплопроводность углеродных тиглей и форм, поэтому получаемые температурные зависимости не всегда будут корректно описывать процесс получения литых заготовок экспериментальным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Специальные способы литья: справочник / В. А. Ефимов, Г. А. Анисович, В. Н. Бабич [и др.]; под общ. ред. В. А. Ефимова. – М.: Машиностроение, 1991. – 436 с: ил.
2. Бигеев, А. М. Металлургия стали / А. М. Бигеев. – Челябинск: Металлургия: Челяб. отд-ние, 1988. – 480 с.
3. Борнацкий, И. И. Основы физической химии: учеб. для техникумов / И. И. Борнацкий. – М.: Металлургия, 1989. – 320 с.
4. Рабинович, В. А. Краткий химический справочник / В. А. Рабинович, З. Я. Хавин. – Л.: Химия, 1991. – 432 с.
5. Новохацкий, В. А. Малоотходная технология производства стальных отливок с экзотермическими прибылями / В. А. Новохацкий, А. А. Жуков, Ю. И. Макарычев. – М.: Машиностроение, 1986. – 64 с.
6. Использование алюминиевого сплава с высоким содержанием примесных элементов в качестве восстановителя для получения сортовых марок сталей при алюмотермии / В. В. Предеин, А. В. Попов, О. Н. Комаров, С. Г. Жилин, А. И. Евстигнеев // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2017. – № III-1(31). – С. 106-114.
7. ГОСТ 8.585-2001. Государственная система обеспечения единства измерений. Термопары. Номинальные статические характеристики преобразования. – Введ. 2002-06-30. – М.: Изд-во стандартов, 2002. – II, 81 с.
8. Влияние начальных температур шихты и формы на структуру и физико-механические свойства литых заготовок, получаемых при алюмотермитном переплаве / В. В. Предеин, О. Н. Комаров, А. В. Попов, С. Г. Жилин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2017. – Т. 19. – № 4. – С. 24-40.
9. Абашкин, Е. Е. Влияние упаковки компонентов термитного наполнителя порошковой проволоки на процессы электродугового переплава / Е. Е. Абашкин, С. Г. Жилин, О. Н. Комаров // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № I-1(33). – С. 96-104.
10. Получение слябовых заготовок из кипящей стали для прокатного производства методом металлотермии / О. Н. Комаров, С. Г. Жилин, В. В. Предеин, Е. Е. Абашкин, А. В. Попов // Заготовительные производства в машиностроении. – 2017. – Т. 15. – № 3. – С. 136-140.
11. Пат. 2637735 Российская Федерация, МПК⁷ C21B15/02. Способ получения низкоуглеродистой кипящей стали / О. Н. Комаров, С. Г. Жилин, А. В. Попов, К. С. Бормотин; заявл. 13.05.2016; опубл. 06.12.2017. Бюл. № 34.
12. The influence of structure on the strength properties of casting steel obtained with the use of thermite materials / O. N. Komarov, S. G. Zhilin, D. A. Potianikhin, V. V. Predein, E. E. Abashkin, A. A. Sosnin, A. V. Popov // AIP Conference Proceedings Proceedings of the 10th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures. – 2016. – P. 040027.