

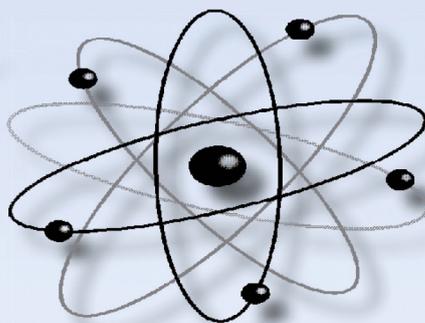
ISSN 2076-4359

Учёные записки

№ VII (79)

2024

Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета



Науки о природе и технике

16+



Рукописи проходят обязательное рецензирование.

Отделы журнала «Управление», «Вычислительная техника и информатика», «Машиностроение», «Культурология и искусствоведение» включены в перечень изданий ВАК РФ.

Зарегистрировано Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций России. Свидетельство ПИ № ФС7738212 от 30.11.2009.

ISSN 2076-4359 = Učenyje zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta

Уважаемые авторы, пожалуйста, присылайте свои материалы на адрес электронной почты: journal@knastu.ru

Правила оформления материалов размещены на странице журнала «Учёные записки КНАГТУ», находящейся на сайте <https://uzknastu.ru>

Материалы, оформленные с нарушением данных правил, к рассмотрению не принимаются.

Адрес учредителя и издателя: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, д. 27
Телефон для справок: +7 (4217) 528-548

Адрес редакции: 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Комсомольская, д. 50, ауд. 508

Индекс журнала в каталоге Роспечать: 66090.

Цена свободная.

© Все права на опубликованные материалы принадлежат учредителю журнала – ФГБОУ ВО «КНАГУ», при их цитировании ссылка на журнал обязательна.

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет»

Журнал основан в 2010 году

Редакционная коллегия:

| | |
|---|---|
| Главный редактор журнала: | Алексей Иванович Евстигнеев , доктор технических наук, профессор. E-mail: diss@knastu.ru |
| Заместитель главного редактора журнала: | Александр Витальевич Космынин , доктор технических наук, профессор. E-mail: avkosm@knastu.ru |
| Выпускающий редактор серии «Науки о природе и технике»: | Евгения Павловна Иванкова , кандидат технических наук, доцент. E-mail: peit@knastu.ru |
| Выпускающий редактор серии «Науки о человеке, обществе и культуре»: | Галина Алексеевна Шушарина , кандидат филологических наук, доцент. E-mail: lmk@knastu.ru |
| Литературный редактор: | Татьяна Николаевна Карпова . E-mail: karpovat@list.ru |
| Технический редактор: | Татьяна Николаевна Карпова . E-mail: karpovat@list.ru |
| Перевод на английский язык: | Галина Алексеевна Шушарина , кандидат филологических наук, доцент. E-mail: lmk@knastu.ru |
| Дизайн и верстка: | Оксана Вадимовна Приходченко , кандидат технических наук. E-mail: cik@knastu.ru |
| Менеджер информационных ресурсов: | Татьяна Владимировна Степанова . E-mail: osnid@knastu.ru |
| Администратор сайта: | Алексей Александрович Просолович , кандидат технических наук. E-mail: cik@knastu.ru |

Серия: «Науки о природе и технике»

Ответственный секретарь серии «Науки о природе и технике» **Евгения Павловна Иванкова**, кандидат технических наук, доцент.
E-mail: peit@knastu.ru

Отделы:

| | |
|--|--|
| 1. Авиационная и ракетно-космическая техника (2.5.13 - Проектирование, конструкция и производство летательных аппаратов) | Сергей Иванович Феоктистов , доктор технических наук, профессор. E-mail: ssf@knastu.ru Сергей Борисович Марьин , доктор технических наук, доцент. E-mail: as@knastu.ru |
| 2. Энергетика (2.4.2 - Электротехнические комплексы и системы) | Константин Константинович Ким , доктор технических наук, профессор. E-mail: kimkk@inbox.ru Александр Владимирович Сериков , доктор технических наук, профессор. E-mail: em@knastu.ru Сергей Николаевич Иванов , доктор технических наук, доцент. E-mail: snivanov57@mail.ru |
| 3. Управление (2.3.3 - Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами) | Вячеслав Алексеевич Соловьев , доктор технических наук, профессор. E-mail: keparu@knastu.ru Андрей Юрьевич Торгашов , доктор технических наук, доцент. E-mail: torgashov@iacp.dvo.ru |
| 4. Вычислительная техника и информатика (1.2.2 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ) | Валерий Иванович Одиноков , доктор технических наук, профессор. E-mail: osnid@knastu.ru Александр Витальевич Космынин , доктор технических наук, профессор. E-mail: avkosm@knastu.ru |
| 5. Машиностроение (2.5.5 - Технология и оборудование механической и физико-технической обработки) | Борис Яковлевич Мокрицкий , доктор технических наук, профессор. E-mail: boris@knastu.ru Владимир Сергеевич Щетинин , доктор технических наук, доцент. E-mail: schetynin@mail.ru |
| 6. Материаловедение и химические технологии (2.6.17 - Материаловедение) | Эдуард Анатольевич Дмитриев , доктор технических наук, профессор. E-mail: rector@knastu.ru Олег Викторович Башков , доктор технических наук, профессор, E-mail: bashkov_ov@mail.ru |
| 7. Математика и механика (1.1.8 - Механика деформируемого твёрдого тела) | Анатолий Александрович Буренин , доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН. E-mail: burenin@iacp.dvo.ru Константин Сергеевич Бормотин , доктор физико-математических наук, доцент. E-mail: as@knastu.ru Олег Викторович Башков , доктор технических наук, профессор, E-mail: bashkov_ov@mail.ru Олег Евгеньевич Сысоев , доктор технических наук, профессор, E-mail: sia@knastu.ru |

Серия: «Науки о человеке, обществе и культуре»

Ответственный секретарь серии «Науки о человеке, обществе и культуре» **Галина Алексеевна Шушарина**, кандидат филологических наук, доцент.
E-mail: lmk@knastu.ru

Отделы:

| | |
|---|---|
| 1. Культурология и искусствоведение (5.10.1 - Теория и история культуры, искусства) | Яна Станиславовна Крыжановская , доктор культурологии, доцент. E-mail: krijanowsckaia.yana2012@yandex.ru Евгения Валерьевна Савелова , доктор философских наук, кандидат культурологии, доцент. Виктория Юрьевна Прокофьева , доктор филологических наук, профессор. Илья Игоревич Докучаев , доктор философских наук, профессор. |
| 2. Психология и педагогика (5.8.1 - Общая педагогика, история педагогики и образования) | Татьяна Евгеньевна Наливайко , доктор педагогических наук, профессор. E-mail: tenal@knastu.ru |
| 3. История (5.6.1 - Отечественная история) | Жанна Валерьяновна Петрунина , доктор исторических наук, профессор. E-mail: petrunina71@bk.ru, history@knastu.ru |

Периодичность: два раза в квартал (один номер каждой серии в квартал)

Содержание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

| | |
|--|-----|
| Лосев А. С. КОНТЕКСТНЫЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР | 5 |
| Буров А. Е., Москвичев Е. В. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ТКАНОГО УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ | 12 |
| Варыгина М. П., Буров А. Е. ВЛИЯНИЕ ТОПОЛОГИИ ПОРИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА СВОЙСТВА ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ | 18 |
| Водинчар Г. М. РАСЧЁТ И ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ СОБСТВЕННЫХ МОД СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО | 25 |
| Одинокоев В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Чернышова Д. В. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕГОСЯ В ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ МЕТАЛЛА, ИМЕЮЩЕГО ДЕФЕКТЫ В ВИДЕ ПУСТОТ | 31 |
| Тимофеев Г. А., Бердоносоев В. Д. ОПТИЧЕСКОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ СИМВОЛОВ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ: МЕТОДЫ АВТОМАТИЗАЦИИ СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ | 41 |
| Цициашвили Г. Ш., Гаврилов А. Н. ЗОНИРОВАНИЕ РАЙОНОВ РЕГИОНА ПО БЛИЗОСТИ К ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ | 46 |
| Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Пашковская О. В. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА | 50 |
| Иванов Д. Х. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО МНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФфуЗИИ | 58 |
| Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ | 65 |
| Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О. ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗОГРЕВ ЗА СЧЁТ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ТРЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ЕЁ ДВИЖЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ | 68 |
| Трухин В. О., Анисич А. И., Лобанова Э. А., Нефедев К. В. РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА МОДЕЛИ ИЗИНГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA | 77 |
| Мурашкин Е. В. УСЛОВИЯ АТЕРМИЧНОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЛЯ ПОЛУИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД | 82 |
| Фролов Д. О., Петрова А. Н. СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К АРХИТЕКТУРЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ РЕЛЕВАНТНОСТИ ПОИСКА В БОЛЬШИХ ОБЪЁМАХ ДАННЫХ | 87 |
| Чехонин К. А. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛАЗЕРНЫХ АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ | 92 |
| Ткаченко П. Г., Котляров В. П. АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКРАНОПЛАНА И САМОЛЁТА КАК ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА | 100 |
| Башков О. В., Люй Лань, Бао Фэньюань, Чжао Цзыдун, Башкова Т. И. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНДУКТИВНОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ ОКСИДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ НА АЛЮМИНИЕВОМ СПЛАВЕ МЕТОДОМ МИКРОДУГОВОГО ОКСИДИРОВАНИЯ | 107 |
| УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ КНАГТУ: НАУКИ О ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ 2024 | 114 |



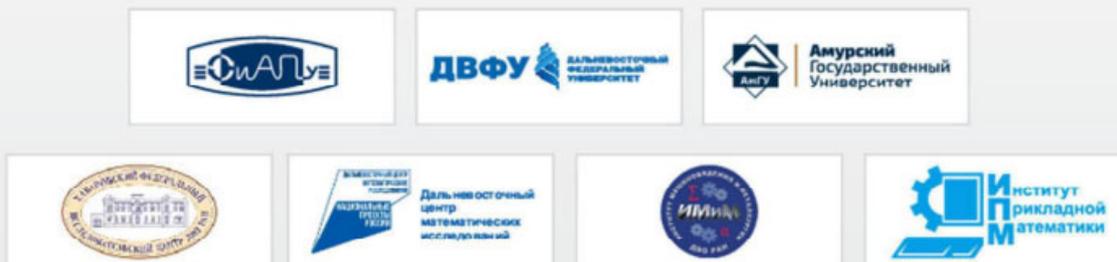
Выпуск данного номера журнала по разделу «Вычислительная техника и информатика» (1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ) создан по материалам докладов **III научной конференции с международным участием «Вычислительные технологии и прикладная математика»**, проведённой 7-11 октября 2024 г. на базе Комсомольского-на-Амуре государственного университета.

КОНФЕРЕНЦИЯ ПРИУРОЧЕНА К 300-ЛЕТИЮ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И ПРЕДСТОЯЩЕМУ 70-ЛЕТИЮ КНАГУ

ВТПМ

III Научная конференция
с международным участием
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

07-11 октября 2024 г.



Сайт конференции: science.knastu.ru

г. Комсомольск-на-Амуре

Лосев А. С.
A. S. Losev

КОНТЕКСТНЫЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

CONTEXTUAL APPROACH TO ANALYSIS OF NETWORK STRUCTURES

Лосев Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (Россия, Владивосток); тел. 8(914)328-91-58. E-mail: A.S.Losev@yandex.ru.

Alexander S. Losev – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok); tel. 8(914)328-91-58. E-mail: A.S.Losev@yandex.ru.

Аннотация. В работе предложено решение проблемы первичной обработки сетевых структур большой размерности в условиях неопределённости. Раскрываются особенности использования контекстного подхода в структурном анализе объектов исследования, представимых в виде теоретико-графовых моделей. Получены алгоритмы кластеризации и классификации ориентированного графа, определяющие набор доминантных связей, которые отражают особенности строения графа и позволяют выбрать дальнейшие методы его обработки.

Summary. The paper proposes a solution to the problem of primary processing of high-dimensional network structures under conditions of uncertainty. The features of using the contextual approach in the structural analysis of research objects, represented in the form of graph-theoretic models, are revealed. Algorithms for clustering and classification of an oriented graph are obtained, which determine a set of dominant connections that reflect the structural features of the graph and allow the selection of further methods for its processing.

Ключевые слова: контекст, множество доминант, связность, кластеризация.

Key words: context, set of dominants, connectivity, clustering.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00).

УДК 1519.178

Введение. Порядок измерения объёма передаваемой информации растёт геометрически, суточный интернет-трафик одной рабочей станции, подключённой к сети, соизмерим с годовым трафиком двадцатилетней давности. Естественным образом возникает проблема алгоритмической обработки большого потока информации и её дальнейшего структурирования. Наиболее распространённым представлением по причине наглядности и удобства считается сетевая модель. Она широко используется в различных научных (биологических, химических, информационных, технических) и промышленных (транспорт, экономика, социология) сферах [2].

Отличительными особенностями такого представления информации являются наглядность, компактность, открытость к дополнению и уточнению. Наравне с этим существует множество современных методов обработки сетевых структур с помощью машинного обучения и искусственного интеллекта. Среди них выделяют вероятностные, логические, теоретико-графовые и искусственно интеллектуальные подходы [9]. Каждый из подходов обладает своими особенностями, требованиями к реализации и ограничениями. Но использование каждого из них требует наличия входной информации, которая уже отражает особенности строения исследуемой структуры. Например, в задачах кластеризации с помощью машинного обучения необходимы число кластеров разбиения или признаков [5; 10], плотность рассеивания или взаимное пространственное расположение объектов структуры [4], или прочие характерные свойства [3; 7; 11]. Таким образом, из-



вестные подходы в большей степени ориентированы на уточнение информации о сетевой структуре, которая зачастую является представителем знакомого класса исследуемых объектов.

Следовательно, возникает проблема выбора метода обработки сетевой структуры большой размерности в условиях неопределённости и отсутствия информации об особенностях её функционирования и строения. Подобная проблема возникает в обработке большого объёма выборок в статистических исследованиях, содержащих высокую долю случайных флуктуаций, которая решается методами первичной обработки.

В настоящей работе предлагается использовать контекстный подход в обработке и структурном анализе сетевых моделей, основанный на выделении доминантных связей. В отличие от известных подходов кластеризации и классификации, он не требует уникальной информации об объекте исследования и особенностях взаимного расположения его частей, а опирается только на информацию о наличии связей между его элементами, образующих сетевую структуру.

Основная идея предлагаемого подхода основана на работах академиков П. К. Анохина и А. А. Ухтомского. В работах П. К. Анохина [1], посвящённых исследованию особенностей функционирования систем, отдельное место занимает вопрос синергетических эффектов, возникающих в зависимости от ситуации, приводящих к проявлению тех или иных свойств системы, которые определяют особенности её строения и функционирования в отдельно взятый момент времени. Аналогичные эффекты занимают центральное место в теории доминант А. А. Ухтомского [12], по мнению которого данные эффекты определяются набором отдельных связей (рёбер) в системе (структуре). Им доказано, что набор доминант и их расположение отражают основные характеристики системы (структуры) и определяют особенности её функционирования. Наравне с этим обоими исследователями показано, что перечень этих связей не стационарен и подвержен изменению в зависимости от наблюдаемой ситуации и условий. Сравнительный анализ данных результатов позволил прийти к умозаключению, что контекст рассмотрения объекта исследования задаётся совокупностью доминантных связей, где доминантной связью является отдельно взятое ребро или соединение из системы, ничем не отличающееся по рассматриваемым характеристикам от прочих, но обладающее значительным воздействием на исследуемые характеристики системы с позиции поставленной задачи.

Основываясь на идее доминантных связей в системах, воспользуемся контекстным подходом для структурного анализа сетевых структур в предположении, что они имеют большую размерность и в качестве исходной информации об их строении известны только матрицы смежности, отражающие наличие связей между отдельными объектами сети. В общем виде под сетевой структурой будем понимать совокупность узлов и дуг, характеризующих взаимосвязь однотипных объектов.

В качестве математической модели сетевой структуры возьмём ориентированный граф $\Gamma(U, W)$ без петель с конечным множеством вершин U и рёбер W , в котором $|U| = n$, $|W| = m$. Положим, что две вершины $u, v \in U$ графа Γ циклически эквивалентны и принадлежат одному кластеру $[k]$, если существует цикл, содержащий эти вершины, т. е. ориентированный путь из u в v и обратно. На множестве всех $[U]$ классов эквивалентности, на которые разбивается множество U , введём бинарное отношение \succsim такое, что $[u_i] \succsim [u_j]$, $[u_i], [u_j] \in [U]$, если существует путь из вершины класса $[u_i]$ в вершину класса $[u_j]$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что данное отношение является отношением частичного порядка, т. к. удовлетворяет свойствам:

1. $\forall [u_i] \in [U], [u_i] \succsim [u_i]$.
2. $\forall [u_i], [u_j], [u_i] \in [U], [u_i] \succsim [u_j] \wedge [u_j] \succsim [u_i] \Rightarrow [u_i] \succsim [u_i]$.
3. $\forall [u_i], [u_j] \in [U], [u_i] \succsim [u_j] \wedge [u_j] \succsim [u_i] \Rightarrow [u_i] \succsim [u_j]$.

Ранее в работе [18] представлен алгоритм динамического разбиения сетевой структуры на кластеры по принципу циклической эквивалентности, его работа выстроена таким образом, что он

не требует перезапуска при добавлении новой вершины в случае расширения сетевой структуры, что позволяет его использовать при изучении динамических структур. Естественным образом динамичность структуры не позволяет говорить о стационарном итоговом результате, лишь о его промежуточных позициях, тем самым отражая контекстное рассмотрение структуры на каждом шаге рассмотрения.

Входные данные алгоритма:

- матрица смежности $\|r_{ij}\|_{i,j=1}^n$ графа Γ , в которой, помимо $r_{ij} = 1$ для $(u_i, u_j) \in W$, положим $r_{ii} = 1, 1 \leq i \leq n$, где n – число вершин графа;
- матрица смежности $B = \|b([i], [j])\|_{[u_i], [v_j] \in [U]}$, характеризующая отношение частичного порядка \succcurlyeq на множестве $[U]$ классов эквивалентности, в которой

$$b([i], [j]) = \begin{cases} 1, [u_i] \succcurlyeq [v_i] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Основное тело алгоритма:

Шаг 1. Возьмём первую вершину $u_1 \in U$, образующую первый класс циклической эквивалентности $[1]$, добавим его во множество всех кластеров $K = \{[1]\}$ и положим $b([1], [1]) = 1$.

Шаг 2. Перебираем по очереди следующие $t-1$ вершин, полагаем, что они образуют разбиение множества вершин $\{u_1, \dots, u_{t-1}\}$ на непересекающиеся подмножества $[1], \dots, [t-1]$ и соответствующее множество кластеров K . Здесь же при обработке каждой вершины формируется матрица $B = \|b([i], [j])\|_{[u_i], [v_j] \in [U]}$, где кластер $[j] \in K$ индексируется максимальным номером вершины u_j , входящей в него.

Шаг 3. Рассмотрим вершину u_t , которая имеет связь с вершинами из имеющихся кластеров. Определим множества

$$I = \{i \in \{1, \dots, t-1\} : r_{it} = 1\}, J = \{j \in \{1, \dots, t-1\} : r_{jt} = 1\}.$$

Здесь же каждой вершине из множеств I, J сопоставим кластер и обозначим $[I], [J]$ множества этих кластеров.

Введём в рассмотрение и определим следующие множества:

$$K_I = \bigcup_{[i] \in [I]} \{[k] \in K : b([i], [k]) = 1\}, K_J = \bigcup_{[j] \in [J]} \{[k] \in K : b([k], [j]) = 1\},$$

$$B_1 = K_I \cap K_J, B_2 = K_I \setminus B_1, B_3 = K_J \setminus B_1, B_4 = K \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3).$$

Тогда вершина u_t и вершины из множества B_1 образуют новый кластер $[t] = \{u_t\} \cup B_1$. Следовательно, общее число кластеров уменьшается $K = (K \setminus B_1) \cup \{[t]\}$, как и размерность матрицы B , которая переопределяется по следующим правилам:

$$b([t], [i]) := 1, [i] \in B_2 \cup \{[t]\}, b([i], [j]) := 1, [i] \in B_3, [j] \in B_2 \cup \{[t]\},$$

$$b([i], [j]) := 0, [i] \in B_2, [j] \in B_3 \cup \{[t]\} \cup B_4, b([i], [j]) := 0, [j] \in B_3, [i] \in B_4 \cup \{[t]\},$$

$$b([t], [i]) = b([i], [t]) := 0, [i] \in B_4.$$

Все остальные значения матрицы B остаются без изменения.

Шаг 4. Алгоритм продолжается до полного перебора всех вершин графа, которые в зависимости от наличия или отсутствия связи с вершинами из имеющихся кластеров обрабатываются в соответствии с шагом 2 или шагом 3.

Выходные данные алгоритма:

- множество кластеров $[k] \in K$;
- множество фактор-вершин $[U]$, множество фактор-рёбер $[W]$;
- матрица смежности $B = \|b([i], [j])\|_{[u], [v] \in [U]}$, построенная на основе фактор-рёбер,

которые связывают фактор-вершины.

В содержательном смысле связи, отражённые в матрице смежности фактор-графа, образующие множество фактор-рёбер, считаются доминантными, т. к. отражают особенности строения и иерархического распределения вершин исходного графа при разбиении на компоненты сильной связности.

Необходимо отметить, что по вычислительной сложности алгоритм сравним с известными алгоритмами определения компонентов сильной связности Косарайю и Тарьяна [6; 8], но при этом обладает более высокой скоростью реализации, т. к. основная идея алгоритма, основанная на уточнении информации о сетевой структуре на каждом шаге, не требует повторного обращения к уже обработанным вершинам, что присутствует у известных аналогов.

Последующее уточнение структурных особенностей соединения проводится с помощью построения иерархической структуры каждого кластера или дендрограммы. Определяющим правилом при построении является длина минимального цикла, содержащего пару вершин кластера.

В общем виде на множестве рёбер W графа Γ зададим целочисленную длину $d_w > 0$ каждому ребру $w \in W$. На множестве вершин U введём в рассмотрение матрицу мер близости $M = \|\mu_{ij}\|_{i,j=1}^n$, где $\mu_{ij} = l_{ij} + l_{ji}$ – положительное целое число, характеризующее близость вершин u_i, u_j , составленное из l_{ij} и l_{ji} длин кратчайших путей из вершины u_i в u_j и обратно. Обозначим $\beta = \max_{1 \leq i \neq j \leq n} \mu_{ji}$ и сопоставим каждому целому значению $\lambda, 0 \leq \lambda \leq \beta$ симметричную матрицу

смежности $M^{(\lambda)} = \|\mu_{ij}^{(\lambda)}\|_{i,j=1}^n$ графа $\Gamma^{(\lambda)}$, в которой

$$\mu_{ij}^{(\lambda)} = \begin{cases} 1, & \mu_{ij} \leq \lambda \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Входные данные алгоритма: граф Γ , состоящий из множества кластеров $[k] \in K$, каждый из которых представляет собой сильно связный граф $\Gamma^{(k)}$.

Основное тело алгоритма:

Шаг 1. Используя известный алгоритм Флойда [17], определяем l_{ij} и l_{ji} для всех пар вершин в отдельно взятом кластере $[k_1]$ и строим матрицу $M = \|\mu_{ij}\|_{i,j=1}^m$, где m – число вершин в кластере $[k_1]$.

Шаг 2. Применяя λ_1 раз известный алгоритм в ширину или глубину [6], разбиваем неориентированный граф, образованный матрицей смежности $M^{(\lambda_1)} = \|\mu_{ij}^{(\lambda_1)}\|_{i,j=1}^m, 0 \leq \lambda_1 \leq \beta_1$ на компоненты связности $[[k_1^{(\lambda_1)}]] \in [k_1]$.

Шаг 3. Применяем шаг 1 и шаг 2 по очереди ко всем кластерам $[k] \in K$.

Выходные данные алгоритма: по каждому кластеру $[k_s]$ формируется дендограмма высотой λ_s , которая начинается с одной вершины-кластера $[[k_s^{(\beta_s)}]]$ уровня β_s , содержит все вершины кластера $[k_s]$ и заканчивается набором вершин-кластеров $[[k_s^{(0)}]_1], [[k_s^{(0)}]_2], \dots, [[k_s^{(0)}]_m]$, уровня 0, каждая из которых содержит по одной вершине из кластера $[k_s]$.

В содержательном смысле связи, отражающие деление кластеров по мере движения к нижнему уровню, считаются доминантными, они отражают особенности строения и иерархическое распределение вершин в каждом компоненте связности по мере изменения параметра близости.

Полученные алгоритмы были успешно апробированы в решении задачи о представлении биоинформации на белковой сети растения Арабидопсис, которая является модельной структурой по изучению жизнеспособности клеток, устойчивости к химическим веществам и стрессам. В ходе исследования всей структуры, которая содержит порядка 35 000 белков, экспертами в области биоинженерии была выделена подсеть вторичного метаболизма сети Арабидопсиса размерностью 2824 вершины и 7570 рёбер. В качестве экспертов выступила научно-исследовательская группа лаборатории биоинженерии, возглавляемая член-корреспондентом РАН доктором биологических наук Виктором Павловичем Булгаковым [13–16].

В результате применения алгоритма динамического разбиения сетевой структуры на кластеры по принципу циклической эквивалентности размерность структуры была уменьшена в 1,78 раза. Обработка данного соединения при равных условиях компьютерной реализации составила порядка 2 часов, что в разы меньше по сравнению с методом расчёта матрицы расстояний, реализация которого потребовала почти 7 дней, и намного информативнее по сравнению с методом Тарьяна [6; 8], реализация которого заняла часы, но не отражала доминантных связей. Последующим этапом по наиболее значимым кластерам (см. рис. 1) были построены соответствующие дендрограммы (см. рис. 2).

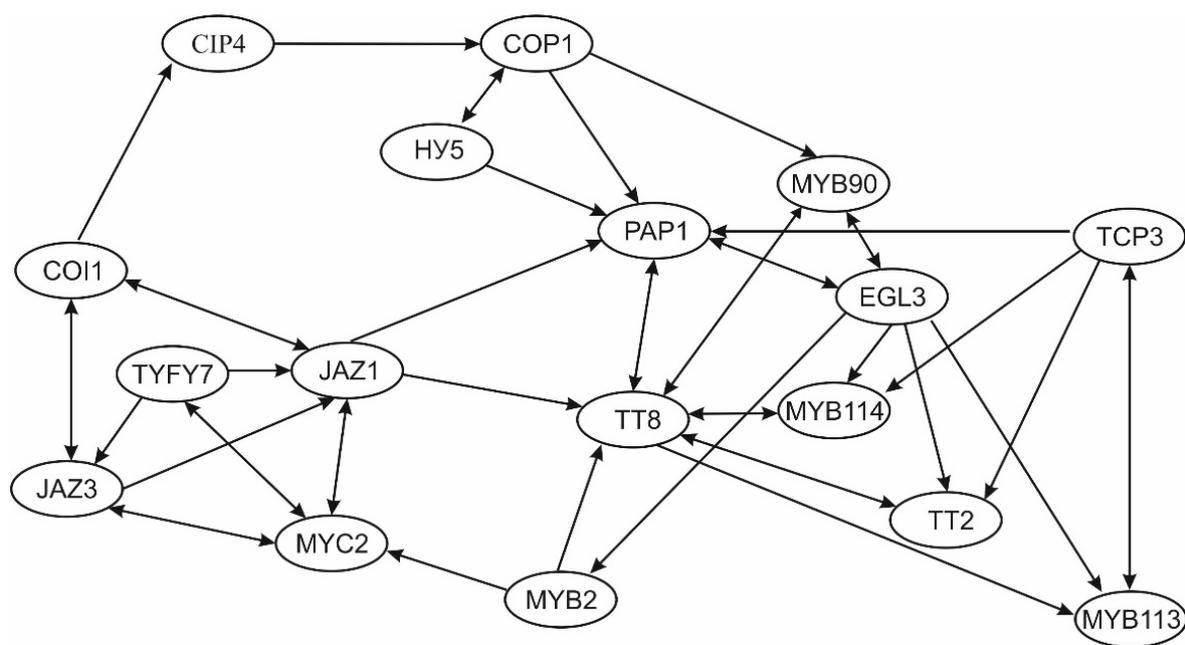


Рис. 1. Пример сильно связанного графа, образующего кластер

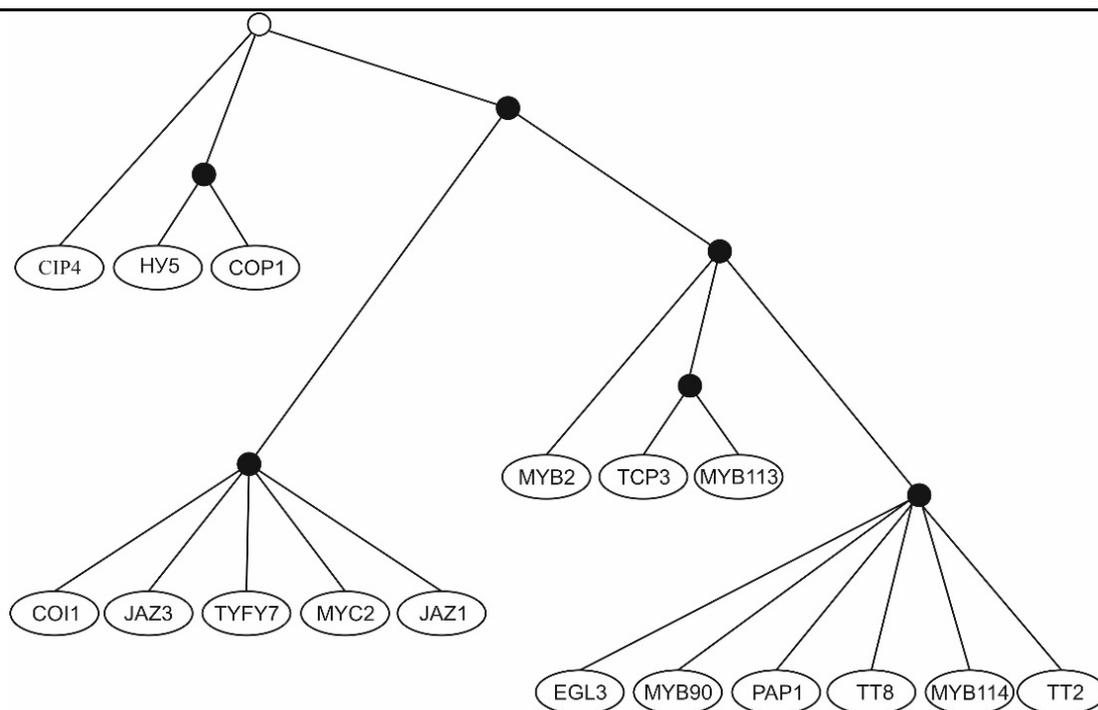


Рис. 2. Пример дендрограммы

Заключение

Применение контекстного подхода является обоснованным и целесообразным в ситуации первичной обработки сетевых структур большой размерности, строение которых сложно охватить общими представлениями. Наравне с этим принцип, основанный на выделении доминантных связей, позволяет наметить дальнейшие шаги исследования. А разработанные алгоритмы, в отличие от известных аналогов выделения компонентов сильной связности, не являются закрытыми, т. е. не требуют повторного перезапуска при любых изменениях в структуре, и отражают доминантные связи, характеризующие иерархическое представление образованных кластеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анохин, П. К. Избранные труды: Кибернетика функциональных систем / П. К. Анохин; под ред. К. В. Судакова. – М.: Медицина, 1998. – 400 с.
2. Баюк, Д. А. Практическое применение методов кластеризации, классификации и аппроксимации / Д. А. Баюк, Д. В. Березин, В. А. Иванюк. – М.: Прометей, 2020. – 448 с.
3. Белявский, Г. И. Обучение без учителя и робастная оптимизация в задаче о портфеле / Г. И. Белявский, Н. В. Данилова, А. Д. Логунов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2020. – № 4 (208). – С. 4-9.
4. Брюхомицкий, Ю. А. Параметрические методы распознавания образов динамической биометрии / Ю. А. Брюхомицкий // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 12. – С. 170-180.
5. Казаков, М. А. Алгоритм кластеризации на основе разбиения пространства признаков / М. А. Казаков // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2022. – Т. 39. – № 2. – С. 136-149.
6. Алгоритмы. Построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. – 955 с.
7. Корнеев, В. В. Параллельные вычислительные системы / В. В. Корнеев. – М.: Нолидж, 1999. – 311 с.
8. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
9. Олескин, А. В. Сетевые структуры в биосистемах и человеческом социуме / А. В. Олескин. – М.: Издательство URSS, 2012. – 280 с.
10. Петрова, А. Н. Разработка модели для ранжирования объектов в системах больших данных / А. Н. Петрова, Д. О. Фролов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2024. – № III (75). – С. 43-47.

11. Петрова, А. Н. Разработка нейронных сетей для сквозного обучения моделей поиска информации / А. Н. Петрова, Д. О. Фролов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2024. – № III (75). – С. 48-52.
12. Ухтомский, А. А. Доминанта / А. А. Ухтомский. – СПб.: Питер, 2002. – 448 с.
13. Bulgakov, V. P. Critical analysis of protein signaling networks involved in the regulation of plant secondary metabolism: focus on anthocyanins / V. P. Bulgakov, T. V. Avramenko, G. Sh. Tsitsiashvili // Crit. Rev. Biotechnol. – 2017. – Vol. 37. – P. 685-700.
14. Bulgakov, V. P. Linking Brassinosteroid and ABA Signaling in the Context of Stress Acclimation / V. P. Bulgakov, T. V. Avramenko // International Journal of Molecular Sciences. – 2020. – Vol. 21. – № 14. – Article ID 5108.
15. Bulgakov, V. P. Basic Protein Modules Combining Abscisic Acid and Light Signaling in Arabidopsis / V. P. Bulgakov, O. G. Koren // Frontiers in Plant Science. – 2022. – Vol. 12. Article ID 808960.
16. Bulgakov, V. P. Chromatin modifications and memory in regulation of stress-related polyphenols: finding new ways to control flavonoid biosynthesis / V. P. Bulgakov // Critical Reviews in Biotechnology. – 2024. – Article ID 2336529.
17. Floyd, R. W. An adaptive algorithm for spatial greyscale / R. W. Floyd, L. Steinberg // SID 75 Digest. – 1975. – P. 36-37.
18. Tsitsiashvili G. Sh. Hierarchical Classification of Directed Graph Nodes and Application of Protein networks / V. P. Bulgakov, A. S. Losev, G. Sh. Tsitsiashvili // Biostatistics and Biometrics Open Access Journal. – 2017. – Vol. 1 (4).



Буров А. Е., Москвичев Е. В.
A. E. Burov, E. V. Moskvichev

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ТКАНОГО УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

EXPERIMENTAL STUDY ON EFFECT OF HOLE ON STRENGTH OF PLAIN WEAVE COMPOSITE UNDER TENSION

Буров Андрей Ефимович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий (Россия, Красноярск); тел. 8(391)227-29-12. E-mail: aeburov@ict.nsc.ru.

Andrey E. Burov – PhD in Engineering, Leading Researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies (Russia, Krasnoyarsk); tel. 8(391)227-29-12. E-mail: aeburov@ict.nsc.ru.

Москвичев Егор Владимирович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий (Россия, Красноярск); тел. 8(391)227-45-70. E-mail: jugr@ict.nsc.ru.

Egor V. Moskvichev – PhD in Engineering, Senior Researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies (Russia, Krasnoyarsk); tel. 8(391)227-45-70. E-mail: jugr@ict.nsc.ru.

Аннотация. Работа посвящена экспериментальным исследованиям влияния концентратора напряжений, размер которого сопоставим с элементарной ячейкой структуры, на прочность композиционных материалов при растяжении. Испытания проводились на пластинах из тканого материала полотняного плетения на основе углеродных волокон и эпоксидного связующего с центральным отверстием. Распределение напряжений в ослабленном отверстием сечении пластины, вычисленное по измеренным деформациям, сравнивается с аналитическим решением. Наблюдаемое снижение прочности образцов с отверстием значительно меньше теоретического значения, что свидетельствует о низкой чувствительности материала к данному типу концентратора. На основе критерия напряжения в точке определена зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений от масштабного параметра.

Summary. The work is devoted to experimental study on the effect of a stress concentrator, which size is comparable with a unit cell, on the strength of composite materials under tension. Tests were carried out on plates made of plain weave composite based on carbon fibers and epoxy binder with a central hole. The stress distribution in the plate section weakened by the hole, calculated from the measured strains, is compared with the analytical solution. The observed strength reduction of the notched samples is significantly less than the theoretical value, indicating a low sensitivity of the material to this type of concentrator. Based on the point stress criterion, the dependence of the effective stress concentration coefficient on the scale parameter is determined.

Ключевые слова: эксперимент, тканые композиты, отверстие, концентрация напряжений, прочность.

Key words: experiment, plain weave composite, hole, stress concentration, strength.

УДК 539.4

Введение. Резкие изменения геометрии поперечного сечения элементов конструкций, такие как отверстия, вырезы и галтели, вызывают формирование примыкающей к ним области повышенных напряжений, известное как концентрация напряжений [5]. Концентраторы напряжений являются местом возникновения повреждений и инициации трещин [2; 13], однако их наличие неизбежно при практическом применении деталей из композиционных материалов (КМ), прежде всего для их крепления или соединения.

Определение влияния концентрации напряжений на несущую способность является актуальной задачей при проектировании композитных элементов конструкций [8; 12; 14]. Как правило, её решение индивидуально для конкретного типа КМ и конфигурации образцов вследствие выра-

женной структурной неоднородности и многообразия возможных механизмов разрушения [4; 7–10]. Численные и экспериментальные исследования показали, что эффективный коэффициент концентрации напряжений в пластинах из тканых углепластиков зависит от размеров отверстия и геометрии образцов [11; 14], материала связующего [9], структуры материала [4; 7; 10; 15], а также технологии создания отверстия [1]. Это обуславливает разработку расчётно-экспериментальных методов, позволяющих прогнозировать прочность элементов конструкций из КМ, содержащих концентраторы напряжений, при ограниченном наборе экспериментальных данных.

Целью настоящих расчётно-экспериментальных исследований является установление влияния отверстия, размер которого сопоставим с элементарной ячейкой структуры материала, на прочность пластин из тканых углепластиков при растяжении.

Материалы и методика исследований. В работе использовались ткани полотняного плетения на основе углеродных волокон и эпоксидного связующего, произведённые в Китае. Размер элементарной ячейки материала составляет порядка 4х4 мм. Прямоугольные образцы из исходных композитных пластин толщиной 2...3 мм получали по технологии гидроабразивной струи, отверстия – фрезерованием. Диаметр D отверстий, расположенных в центре образца, варьировался в пределах 3...8 мм с шагом 1 мм. Ширина образцов W выбиралась исходя из постоянного соотношения $D/W = 0,17$.

Испытания на растяжения до разрушения проводились в Инженерно-испытательном центре ФИЦ ИВТ на универсальной испытательной машине Tinius Olsen 100ST со скоростью нагружения 1 мм/мин при комнатной температуре (см. рис. 1). Продольные деформации в ослабленном сечении регистрировались при помощи бесконтактного видеозекстензометра в восьми точках, расположенных на различном расстоянии от кромки отверстия (см. рис. 1), поперечные деформации – с помощью тензорезисторов. В качестве методической основы проведения экспериментов применялся стандарт ASTM D 5766.

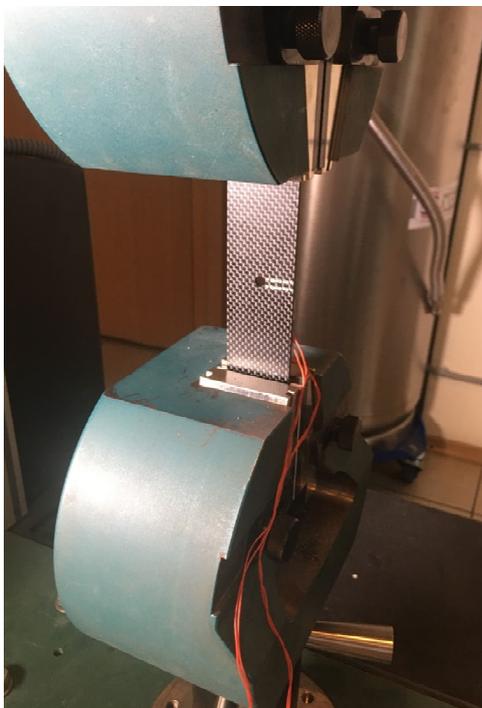


Рис. 1. Внешний вид образца, установленного в испытательной машине

Определение характеристик механических свойств материала проводили на стандартных образцах с двухсторонними лопатками (ГОСТ 32656-2017). По экспериментальным данным получены следующие средние значения: модуль упругости $E_{yy} = 58,88$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{xy} = 0,044$, напряжения разрушения (предел прочности) $\sigma_B = 578$ МПа.

Для оценки снижения прочности композитных пластин с отверстием в центре при одноосном растяжении широко используются две относительно простые модели разрушения: критерий напряжения в точке (КНТ) и критерий среднего напряжения (КСН) [6; 15]. Оба критерия предполагают, что разрушение возникает, когда КНТ или КСН на некотором расстоянии d или a от края отверстия достигает значения предельного напряжения для образцов без концентратора. Параметры d и a являются константами, характеризующими структуру материала, и рассчитываются по экспериментальным данным. Предполагается, что их относительно малый размер не вносит существенного изменения в распределение напряжений возле отверстия, полученное на основе решения упругой задачи.

Предварительный анализ показал, что полученные в эксперименте значения предельной нагрузки более точно описываются на основе модели КНТ. Поэтому именно модель КНТ использовалась для определения влияния отверстия на прочность. Эффективный коэффициент концентрации напряжений K_{ef} (иногда называемый коэффициентом снижения прочности) для образца шириной W с центральным отверстием диаметром D определялся как отношение предела прочности σ_B , значение которого получено на гладких образцах, и номинальных разрушающих напряжений σ_{nc} с учётом относительного размера отверстия и ширины образца [3; 15; 18]:

$$\eta = D/W; \quad \xi = \eta + 2d/W;$$

$$M = \left(\sqrt{1 - 8 \left[\frac{3(1-\eta)}{2 + (1-\eta)^3} - 1 \right] - 1/2\eta^2} \right)^{0,5};$$

$$f_w = \left(\frac{3(1-\eta)}{2 + (1-\eta)^3} + \frac{(\eta M)^6}{2} (K_\infty - 3)(1 - (\eta M)^2) \right)^{-1};$$

$$K_{ef} = \frac{\sigma_B}{\sigma_{nc}} = f_w \left[1 + \frac{(\eta/\xi)^2}{2} + \frac{3(\eta/\xi)^2}{2} (\eta/\xi)^4 - \frac{K_\infty - 3}{2} (5(\eta/\xi)^6 - 7(\eta/\xi)^8) \right], \quad (1)$$

где f_w – поправочная функция, учитывающая конечную ширину пластины; K_∞ – коэффициент концентрации на кромке отверстия для бесконечной ортотропной пластины, рассчитываемый по известному решению [15]:

$$K_\infty = 1 + \sqrt{\frac{2}{A_{22}} \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} - A_{12} + \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{2A_{66}} \right)},$$

здесь A_{ij} – компоненты эффективной матрицы жёсткости композита.

Значения напряжений в ослабленном сечении в направлении приложения нагрузки рассчитывались по данным регистрируемых в испытаниях деформаций согласно [3; 17]:

$$\sigma_y = \frac{E_{xx}\varepsilon_{xx}}{[1 - \nu_{xy}^2(E_{yy}/E_{xx})]} + \frac{\nu_{xx}E_{yy}\varepsilon_{yy}}{[1 - \nu_{xy}^2(E_{yy}/E_{xx})]}, \quad \nu_{yx} = \nu_{xx}E_{yy}/E_{xx}. \quad (2)$$

Результаты и их обсуждения. Все образцы показали хрупкое разрушение по минимальному сечению с практически линейным характером диаграммы деформирования. Результаты испытаний, эффективный коэффициент концентрации напряжений и значения d , полученные из решения уравнения (1) представлены в табл. 1.

Как следует из данных табл. 1, среднее значение эффективного коэффициента концентрации напряжений составляет 1,34, что значительно меньше теоретического значения, которое для квазиизотропного материала равно 3 [3]. Низкая чувствительность несущей способности тканых композитов к наличию круглого отверстия также отмечалась в работах других авторов [4; 16].

Таблица 1

Разрушающие напряжения и эффективные коэффициенты концентрации

| № образца | D , мм | σ_{nc} , МПа | K_{ef} | d , мм |
|-----------|----------|---------------------|----------|----------|
| 1 | 3,0 | 436,2 | 1,33 | 1,2 |
| 2 | 3,0 | 443,3 | 1,30 | 1,3 |
| 3 | 4,1 | 414,6 | 1,39 | 1,4 |
| 4 | 5,0 | 385,5 | 1,50 | 1,4 |
| 5 | 5,1 | 411,0 | 1,41 | 1,7 |
| 6 | 6,0 | 443,2 | 1,30 | 2,6 |
| 7 | 7,0 | 456,9 | 1,26 | 3,4 |
| 8 | 7,1 | 447,1 | 1,29 | 3,2 |
| 9 | 7,9 | 447,5 | 1,29 | 3,6 |

Зависимость расчётных значений характеристического расстояния d от диаметра отверстия можно аппроксимировать (коэффициент корреляции $R^2 = 0,93$) следующей экспоненциальной функцией:

$$d = 0,57e^{0,24D}. \quad (3)$$

Если учесть, что испытания проводились на образцах, имеющих одинаковое значение отношения D/W , только диаметр отверстия и расстояние d модели КНТ являются масштабными параметрами, которые могут влиять на распределение напряжений в ослабленном сечении и оценку предельной нагрузки. Об этом свидетельствует зависимость K_{ef} от относительного характеристического расстояния (d/D), которая хорошо аппроксимируется степенной функцией (см. рис. 2):

$$K_{ef} = (d/D)^{-0,32}. \quad (4)$$

Таким образом, совместное использование (3) и (4) позволяет оценить влияние круглого отверстия на несущую способность пластин из тканого композита при одноосном растяжении. Следует отметить, что эмпирические зависимости (3) и (4) получены по результатам испытаний образцов с отверстием, размер которого сопоставим с элементарной ячейкой структуры материала. Их использование для данного концентратора напряжений большего размера является предметом дальнейших исследований.

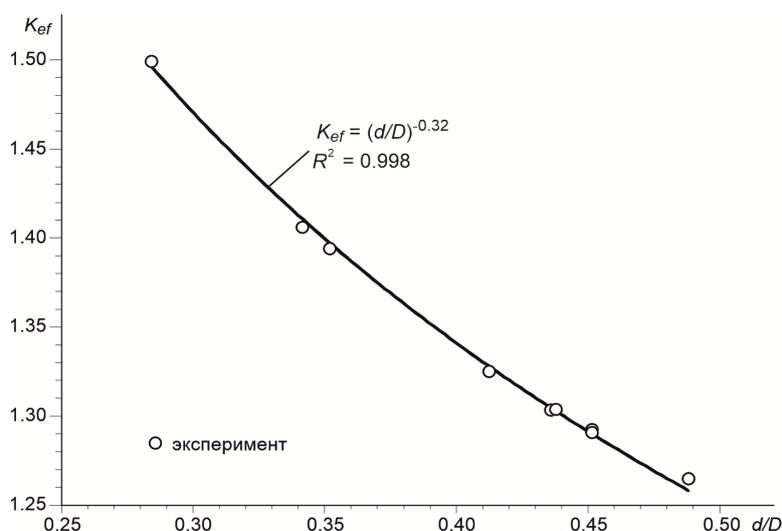


Рис. 2. Масштабная зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений для пластин с отверстием

На рис. 3 представлено сравнение распределения напряжений в ослабленном сечении, определённое по экспериментальным значениям деформаций, с аналитическим решением (2). Расхождение распределений напряжений, особенно в области, примыкающей к концентратору, можно объяснить неоднородностью структуры материала в пределах элементарной ячейки и соответствующей ей вариации упругих свойств, тогда как при расчёте напряжений по (2) использовались их осреднённые характеристики.

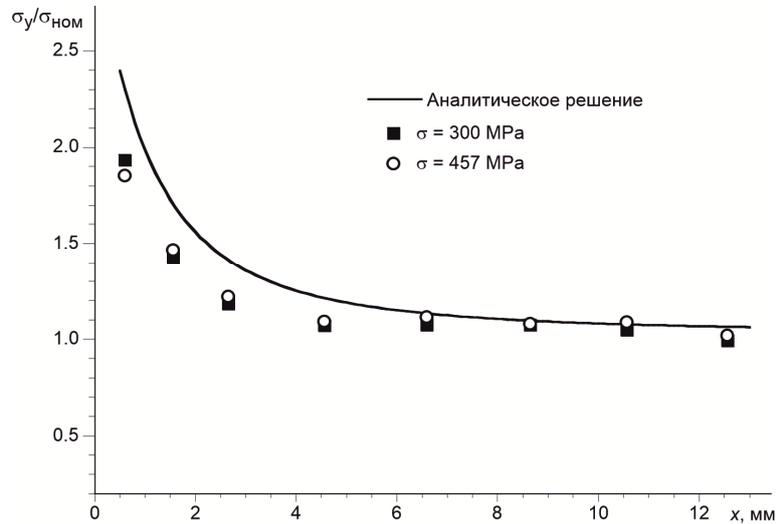


Рис. 3. Распределение напряжений в ослабленном сечении образца с отверстием диаметром 7 мм

Заключение. Проведены испытания до разрушения пластин из тканого углепластика с центральным круглым отверстием диаметром 3...8 мм при одноосном растяжении. Распределение напряжений в ослабленном сечении пластины, вычисленное по экспериментальным значениям деформаций, показало приемлемое соответствие аналитическому решению. Для оценки несущей способности пластин использовался критерий напряжений в точке. По результатам исследований получена зависимость эффективного коэффициента концентрации от отношения характеристического расстояния к диаметру отверстия. Меньшее по сравнению с теоретическим значением снижение прочности образцов с отверстием свидетельствует о низкой чувствительности материала к данному типу концентратора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сравнительное изучение влияния технологий фрезерования и резки гидроабразивной струёй на поведение эпоксидных слоистых углепластиков при растяжении / А. Абиди, С. Бен Салем, А. Безази, Х. Бумедири // *Механика композитных материалов*. – 2021. – Т. 57. – № 4. – С. 767-782.
2. Андрианов, И. К. Моделирование хрупкого разрушения турбинной лопатки с дефектом / И. К. Андрианов, К. А. Палков, Е. К. Чепурнова // *Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике*. – 2024. – № III (75). – С. 32-37.
3. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 299 с.
4. Лешков, Е. В. Экспериментальное исследование прочности гибридных полимерных композитов с концентратором напряжений / Е. В. Лешков, С. Б. Сапожников // *Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации*. – 2020. – Т. 1. – С. 108-111.
5. Серенсен, С. В. Несущая способность деталей машин / С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Р. М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1975. – 354 с.
6. Сукнев, С. В. Применение методов теории критических расстояний для оценки разрушения квазихрупких материалов с вырезами / С. В. Сукнев // *Известия российской академии наук. Механика твёрдого тела*. – 2023. – № 1. – С. 129-141.

7. Татусь, Н. А. Влияние отверстий на снижение прочности композитных образцов с различной укладкой волокон / Н. А. Татусь, А. Н. Полилов, Д. Д. Власов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2022. – Т. 88. – № 4. – С. 58-65.
8. Ali Kouka, M.; Abbassi, F., Demiral, M., et al. Behaviour of woven-ply PPS thermoplastic laminates with interacting circular holes under tensile loading: An experimental and numerical study // Engineering Fracture Mechanics. – 2021. – V. 251. – P. 107802.
9. Elbadry, E. A.; Abdalla, G.; Aboraia M.; Oraby E. Notch sensitivity of short and 2D plain woven glass fibres reinforced with different polymer matrix composites // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2017. – V. 36 (15). – P. 1092-1098.
10. Joshi, P.; Kondo A.; Watanabe N. Numerical analysis to study the effect of through thickness reinforcement with different stitch orientations on open-hole laminates // Plastics Rubber and Composites. – V. 45 (10). – P. 445-454.
11. Kim, S.-Y.; Koo, J.-M.; Kim, D.; Seok, C.-S. Prediction of the static fracture strength of hole notched plain weave CFRP composites // Composites Science and Technology. – 2011. – V. 71. – P. 1671-1676.
12. Kumar, S. A.; Rajesh, R.; Pugazhendhi, S. A. Review of Stress Concentration Studies on Fibre Composite Panels with Holes and Cutouts // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials. – 2020. – V. 234. – P. 1461-1472.
13. Liu, Y.; Zhang, L.; Li, Z., et al. Investigation on damage evolution of open-hole plain woven composites under tensile load by acoustic emission signal analysis // Composite Structures. – 2023. – V. 305. – P. 116481.
14. Mohamed Makki, M., Chokri, B. Experimental, analytical, and finite element study of stress concentration factors for composite materials // Journal of Composite Materials. – 2017. – V. 51 (11). – P. 1583-1594.
15. Moure, M. M.; Herrero-Cuenca, J.; García-Castillo, J. S. K; Barbero, E. Design tool to predict the open-hole failure strength of composite laminates subjected to in-plane loads // Composite Structures. – 2020. – V. 238. – P. 111970.
16. Ozaslan, E.; Yetgin, A.; Acar, B. Stress concentration and strength prediction of 2×2 twill weave fabric composite with a circular hole // Journal of Composite Materials. – 2019. – V. 53 (4). – P. 463-474.
17. Pandita, S. D.; Nishiyabu, K.; Verpoest, I. Strain concentrations in woven fabric composites with holes // Composite Structures. – 2003. – V. 59. – P. 361-368.
18. Tan, S. C. Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening // Journal of Composite Materials. – 1988. – V. 22. – P. 1080-1018.



Варыгина М. П., Буров А. Е.
M. P. Varygina, A. E. Burov

ВЛИЯНИЕ ТОПОЛОГИИ ПОРИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА СВОЙСТВА ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ

INFLUENCE OF POROUS PERIODIC STRUCTURES TOPOLOGY ON BEHAVIOR OF TUBULAR ELEMENTS UNDER TENSION AND TORSION

Варыгина Мария Петровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий (Россия, Красноярск); тел. 8(391)227-49-34. E-mail: vmp@ict.nsc.ru.

Maria P. Varygina – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies (Russia, Krasnoyarsk); tel. 8(391)227-49-34. E-mail: vmp@ict.nsc.ru.

Буров Андрей Ефимович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий (Россия, Красноярск); тел. 8(391)227-29-12. E-mail: aeburov@ict.nsc.ru.

Andrey E. Burov – PhD in Engineering, Leading Researcher, Federal Research Center for Information and Computational Technologies (Russia, Krasnoyarsk); tel. 8(391)227-29-12. E-mail: aeburov@ict.nsc.ru.

Аннотация. В работе представлены результаты конечно-элементного моделирования трубчатых элементов конструкции, состоящих из трижды периодических минимальных поверхностей, под действием осевого растяжения и кручения. Показано влияние размера и типа структуры при сохранении объёма элементарной ячейки на напряжённое состояние и жёсткость трубчатого элемента.

Summary. Results of finite element modeling of tubular structural elements consisting of triply periodic minimal surfaces under axial tensile and torsion are presented in this paper. The influence of the size and structure type with equal volume of elementary cell on stress state and stiffness of tubular element is shown.

Ключевые слова: трижды периодические минимальные поверхности, трубчатый элемент, конечно-элементный анализ, напряжённое состояние, примитивы Шварца, поверхности ИВП Шоэна.

Key words: triply periodic minimal surfaces, tubular element, finite element analysis, stress state, Schwarz primitive, Schoen I-WP surface.

УДК 539.37

Введение. Возможности многоматериальной печати, предоставляемые аддитивным производством, способны обеспечить достаточную точность при изготовлении сложных пористых структур [4; 12]. За счёт настраиваемой геометрии механические метаматериалы, тип которых включает структуру, основанную на трижды периодических минимальных поверхностях (triply periodic minimal surface, TPMS), оказываются более предпочтительными, чем традиционные соты или пористые структуры, благодаря высоким удельным показателям механических характеристик. TPMS представляют собой поверхности, состоящие из точек со средней кривизной, равной нулю, и проявляющие пространственную симметрию и периодичность. Гладкие поверхности таких структур могут быть выражены математическими функциями, изменением параметров которых можно контролировать пористость и площадь поверхности [8].

В последние годы на основе TPMS были разработаны различные конструкции для контроля вибрации [19], поглощения энергии [14] и звука [17], включая многослойные пластины [1], пены, соты, решётки [15]. Они применяются также для улучшения характеристик теплообменников [7; 18], мембран [5], костных имплантов [20]. Несмотря на то что инструменты проектирования и анализа TPMS достаточно хорошо разработаны, некоторые аспекты их механического поведения

требуют дополнительных исследований. Прежде всего это относится к сравнительной оценке их механического поведения при различных видах нагружения.

Трубчатые элементы являются структурными составляющими сложных конструкций во многих отраслях. В работе [6] представлено экспериментальное исследование многослойных трубчатых элементов, составленных из нескольких видов TPMS. Работа [16] посвящена численному и экспериментальному исследованию поведения цилиндрических решётчатых структур, составленных из элементарных ячеек гироида, при сжатии. В работе [13] изучалось напряжённо-деформированное состояние конструкций, составленных из структур на основе примитивов Шварца (Schwarz Primitive) и ИВП Шоэна (Schoen I-graph Wrapped Package) при сжатии.

В данной работе представлены результаты численного анализа механического отклика трубчатых элементов конструкции, составленных из двух типов TPMS, при осевом растяжении и кручении. Особое внимание уделяется подготовке геометрии TPMS для создания численных моделей. Основной целью является оценка влияния топологии и геометрических параметров TPMS на напряжённое состояние и жёсткостную эффективность трубчатых элементов.

Подготовка геометрии. В работе рассматриваются конструкции, составленные из двух типов трижды периодических минимальных поверхностей: ИВП [11] и примитив [21]. Эти поверхности могут быть описаны с использованием метода, основанного на неявных функциях:

$$f(x, y, z) \leq |t|, \quad (1)$$

где t – параметр.

Неявные функции $f_i(X, Y, Z)$ и $f_p(X, Y, Z)$ для поверхностей ИВП и примитива соответственно задаются следующим образом [11] (см. рис. 1):

$$f_i(X, Y, Z) = 2(\cos X \cos Y + \cos Y \cos Z + \cos X \cos Z) - (\cos 2X + \cos 2Y + \cos 2Z),$$

$$f_p(X, Y, Z) = \cos X + \cos Y + \cos Z,$$

где $X = 2\pi x/a$; $Y = 2\pi y/a$; $Z = 2\pi z/a$, здесь a – размер элементарной единичной ячейки.

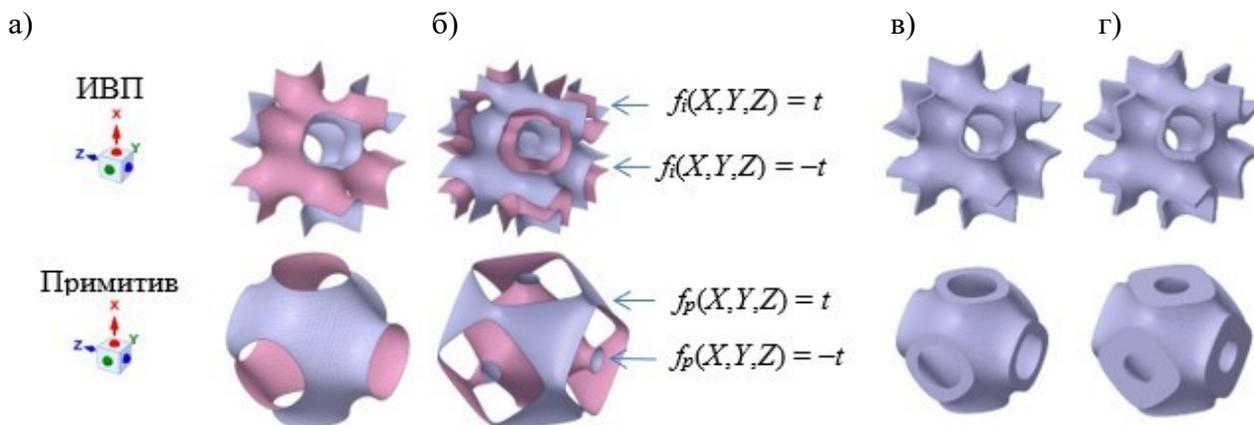


Рис. 1. Структуры TPMS: а – поверхности при $t = 0$; б – поверхности, ограниченные неравенством (1); в – элементарные ячейки при относительной плотности 0,33; г – элементарные ячейки при относительной плотности 0,66

При $t = 0$ генерируемая поверхность делит всё пространство на два равных объёма (см. рис. 1, а). При $t \neq 0$ поверхность смещена относительно поверхности с нулевым значением t . С помощью неравенства (1) можно определить область между поверхностями со значениями t и $-t$ (см. рис. 1, б). Меньшему значению t соответствует меньшая толщина стенки элементарной ячейки. Параметр t напрямую влияет на относительную плотность структуры ρ' , определяемую как доля объёма материала, который занимает структура: $\rho' = \frac{V_c}{V}$, где V_c – объём структуры; V – объём

области, ограничивающей структуру. Относительная плотность структуры является одним из важных параметров, который следует учитывать при проектировании и анализе конструкций. На рис. 1, в-г показаны элементарные ячейки примитива и ИВП при относительной плотности 0,33 и 0,66 соответственно.

Этапы построения численной модели включают в себя создание элементарной ячейки, соответствующей топологии TPMS, преобразование к цилиндрической системе координат, регуляризацию фасетной геометрии, генерацию конструкции на основе пористых периодических структур и её конечно-элементную дискретизацию (см. рис. 2).

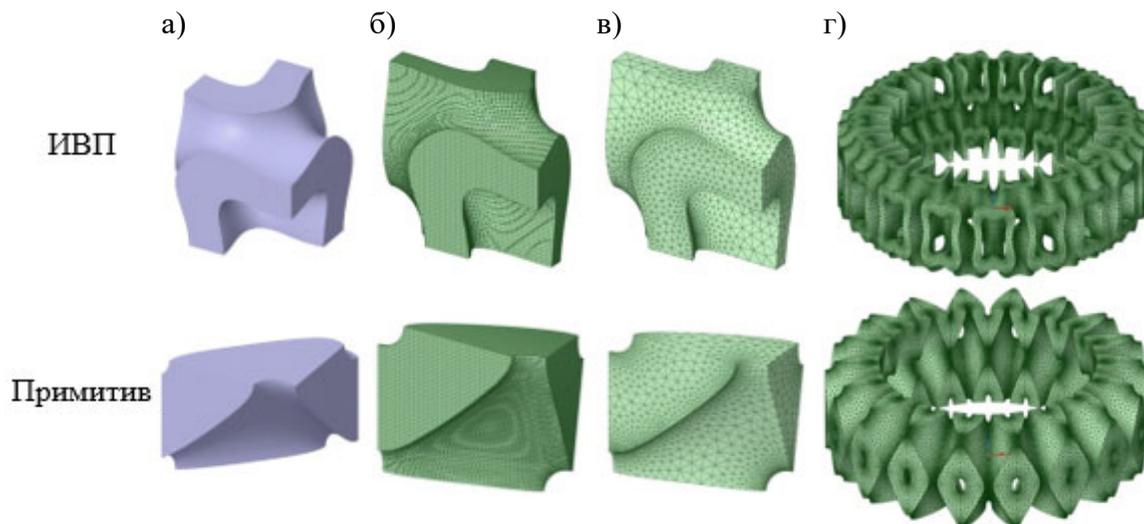


Рис. 2. Этапы подготовки геометрии: а – $\frac{1}{4}$ элементарной ячейки в декартовой системе координат; б – $\frac{1}{4}$ элементарной ячейки в цилиндрической системе координат; в – регуляризация фасетной геометрии; г – построение конструкции из элементарных ячеек

На основе программ для автоматической генерации stl-файлов основных типов TPMS [2, 10] была разработана программа для построения фасетной геометрии трубчатых элементов. В силу симметрии структур ИВП и примитивов для создания геометрии всей конструкции достаточно построить $\frac{1}{4}$ часть элементарной ячейки. Для получения трубчатого элемента необходимо выполнить преобразование из декартовой в цилиндрическую систему координат набора вершин построенной части элементарной ячейки (см. рис. 2, б). Поскольку программы для проектирования фасетной геометрии поверхностей не оптимизированы для численного анализа, сгенерированная сетка может содержать ряд элементов, формы которых оказываются неприемлемыми для проведения расчётов, как отмечается в ряде работ [3; 9]. Поэтому для получения качественной конечно-элементной сетки требуется проводить ряд шагов по регуляризации фасетной геометрии с использованием инструментов сглаживания и перестроения сетки. Узлы сетки перераспределяются на поверхности с минимальным отклонением от исходной геометрии таким образом, что элементы принимают форму, близкую к равносторонним треугольникам, без острых углов.

В данной работе регуляризация проводилась средствами приложения SpaceClaim программного комплекса ANSYS (см. рис. 2, в). На рис. 3 показаны фрагменты элементарной ячейки примитива до и после регуляризации. Отклонение от первоначальной поверхности составляет не более 1 %. На последнем этапе с помощью операций отражения и копирования объектов генерируется фасетная геометрия трубчатых элементов (см. рис. 2, г).

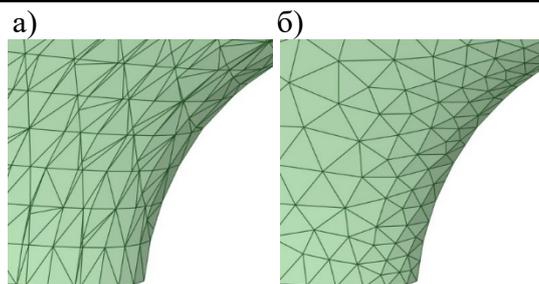


Рис. 3. Фрагмент элементарной ячейки примитива: а – исходное разбиение; б – после регуляризации

Численное моделирование. В данной работе рассматривались трубчатые элементы, составленные из повторяющихся ячеек ИВП и примитива. Размеры элементарной ячейки a выбирались равными 10 и 20 мм. Высота цилиндра $L = 20$ мм, внутренний и внешний радиусы равны соответственно 20 и 30 мм. Для заданных размеров элементарной ячейки методом золотого сечения выполнялся поиск параметра t , при котором относительная плотность конструкции составляет 0,5. Сохранение одинакового объёма позволяет проводить сравнение уровня напряжений и жёсткости. На рис. 4 представлены конечно-элементные дискретизации двух типов структур для двух размеров элементарной ячейки.

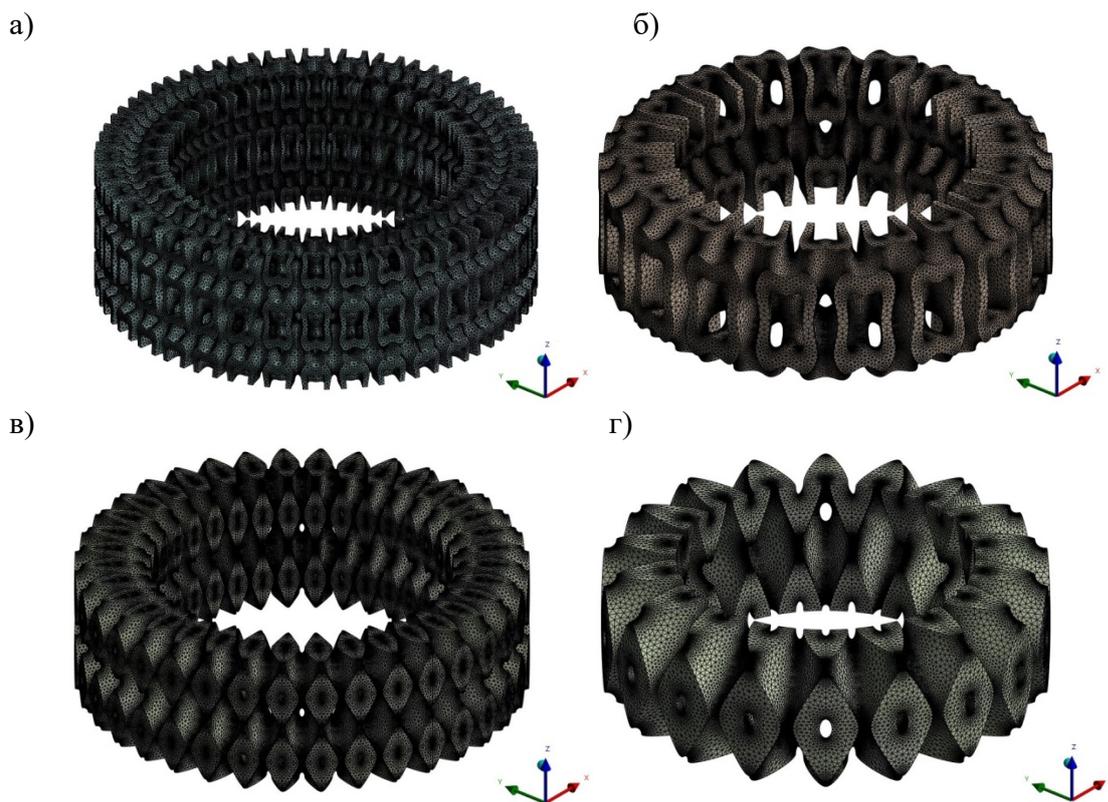


Рис. 4. Трубчатые элементы, составленные из повторяющихся ячеек TPMS:
а – ИВП, $a = 10$ мм; б – ИВП, $a = 20$ мм; в – примитив, $a = 10$ мм; г – примитив, $a = 20$ мм

В численных расчётах были приняты следующие упругие постоянные материала: модуль Юнга $E = 1943$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,43$. Параметры материала близки к параметрам фотополимерной смолы. Расчёты проведены в среде Ansys Mechanical для двух типов нагружения.

В первом случае на верхних площадках трубчатых элементов действовала растягивающая нагрузка 10 000 Н вдоль оси Z. Во втором случае на верхних площадках перемещение составило 1° вокруг оси Z. Нижние поверхности жёстко закреплены.

В табл. 1 приведены значения максимальных эквивалентных напряжений и коэффициента жёсткости элементов. Коэффициент жёсткости при растяжении определялся как отношение силы к вызванному ею перемещению. Согласно данным таблицы, примитивы более податливы по сравнению со структурой ИВП. Параметр a также влияет на механический отклик: его возрастание ведёт к снижению жёсткости трубчатого элемента и возрастанию уровня напряжений. Коэффициент жёсткости при кручении определялся как отношение крутящего момента к углу закручивания. В этом случае примитивы более жёсткие, чем ИВП. Для примитивов жёсткость находится в прямой зависимости от размера элементарной ячейки, а для структуры ИВП – в обратной.

Таблица 1

Расчётные значения максимальных эквивалентных напряжений и коэффициентов жёсткости при растяжении и кручении

| Тип структуры | a , мм | t | Растяжение | | Кручение | |
|---------------|----------|-------|--------------------------------|-------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| | | | $\sigma_{eq. tens. max}$, МПа | $k_{stiff. tens}$, Н/м | $\sigma_{eq. tors. max}$, МПа | $k_{stiff. tors}$, Н·м/рад |
| ИВП | 10 | 1,843 | 32,47 | $6,14 \cdot 10^7$ | 70,18 | $3,31 \cdot 10^5$ |
| | 20 | 1,849 | 51,56 | $5,73 \cdot 10^7$ | 73,44 | $2,96 \cdot 10^5$ |
| Примитив | 10 | 0,871 | 81,66 | $5,40 \cdot 10^7$ | 104,29 | $3,45 \cdot 10^5$ |
| | 20 | 0,873 | 102,09 | $5,02 \cdot 10^7$ | 100,27 | $3,62 \cdot 10^5$ |

Результаты численных расчётов показаны на рис. 5-6 для трубчатых образцов с размером элементарной ячейки $a = 20$. Представлены распределения эквивалентных напряжений по Мизесу для трубчатого элемента и 1/2 части элементарной ячейки.

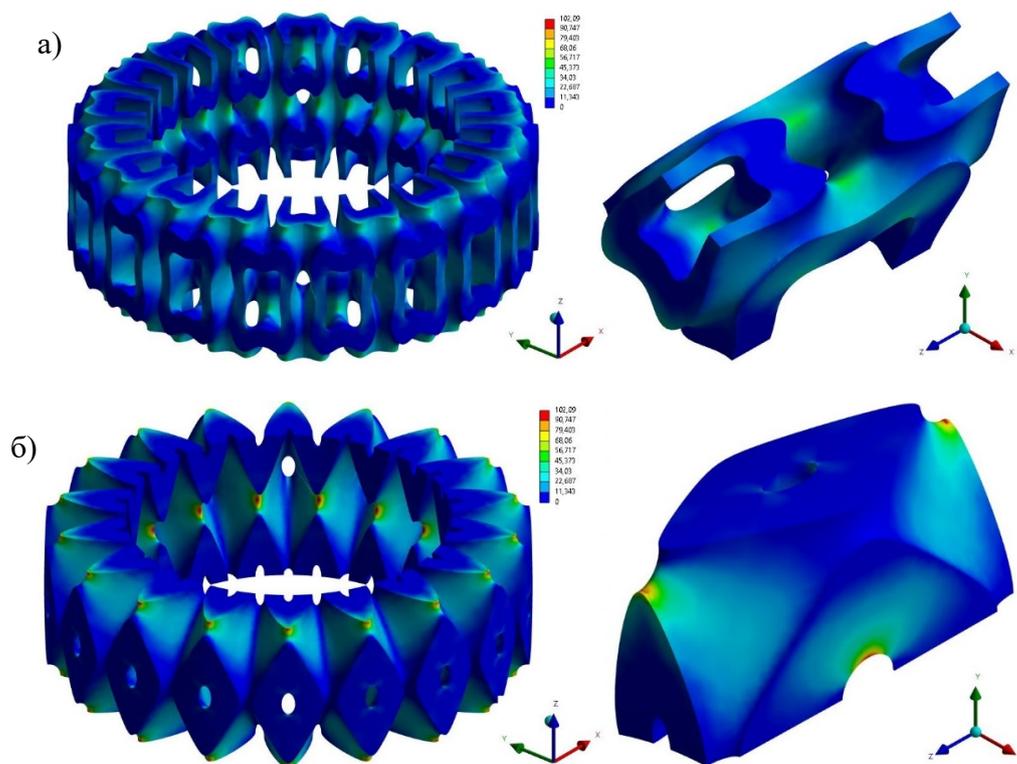


Рис. 5. Растяжение: распределение эквивалентных напряжений по Мизесу (в МПа): а – ИВП, б – примитив

Для двух типов TPMS концентрация напряжений наблюдается в местах резкого изменения геометрии, прежде всего в сечениях, ослабленных отверстиями. Для примитивов значения максимальных напряжений выше, чем для ИВП. При растяжении увеличение размера элементарной ячейки приводит к увеличению уровня максимальных напряжений. При кручении изменение размера элементарной ячейки приводит к незначительным изменениям уровня напряжений.

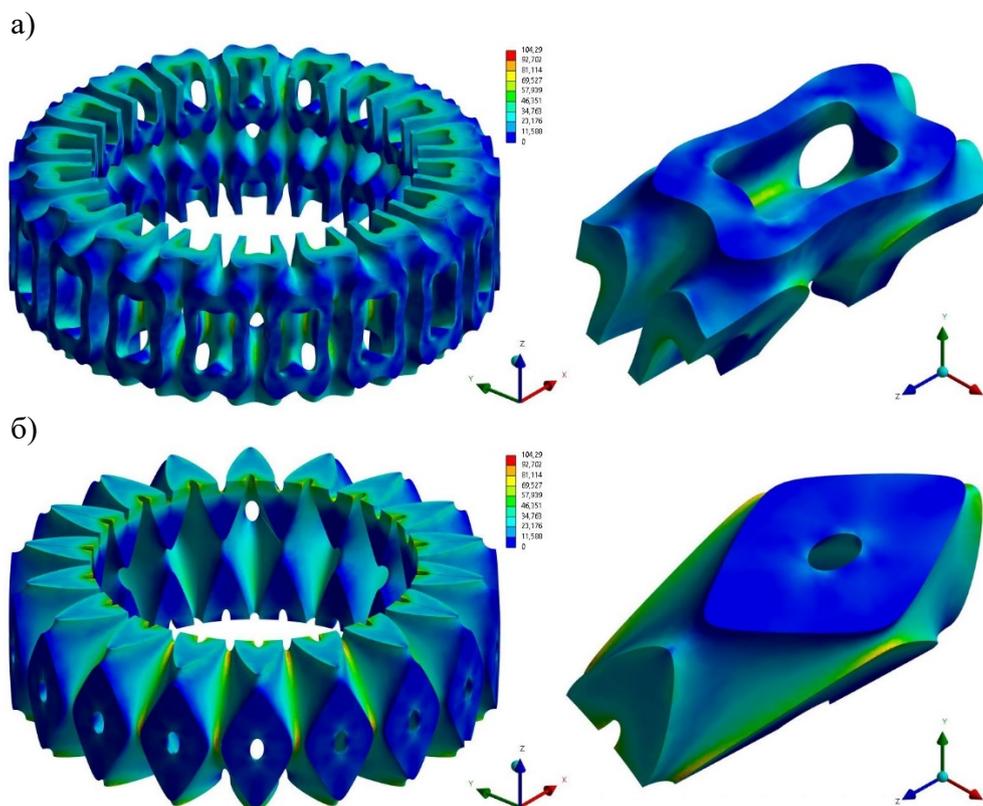


Рис. 6. Кручение: распределение эквивалентных напряжений по Мизесу (в МПа): а – ИВП, б – примитив

Заключение. Объектом исследований настоящей работы является трубчатый элемент конструкции, стенки которого состоят из TPMS различной топологии при сохранении объёма элементарной ячейки. Результаты конечно-элементного моделирования свидетельствуют о выраженном влиянии структуры TPMS на напряжённое состояние и жёсткость составленных из них конструктивных элементов. Для примитивов уровень напряжений выше, чем для структуры ИВП при аналогичных параметрах. При растяжении обеих структур уменьшение размера элементарной ячейки ведёт к большей жёсткости и меньшим максимальным напряжениям. При кручении трубчатый элемент на основе структуры ИВП становится более жёстким с уменьшением размера элементарной ячейки, а для примитивов наблюдается обратная картина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев, И. А. Экспериментальное моделирование трёхточечного изгиба аддитивно изготовленных трёхслойных композитных пластин с тетракиральным наполнителем / И. А. Соловьев, М. В. Шитикова // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2022. – № V (61). – С. 18-25.
2. Al-Ketan, Oraib and Abu Al-Rub, Rashid K. MSLattice: A free software for generating uniform and graded lattices based on triply periodic minimal surfaces // Material Design & Processing Communications. – 2021. – V. 3 (2). – P. 1-10.



3. Bean, Philip; Lopez-Anido, Roberto A. and Vel, Senthil Numerical modeling and experimental investigation of effective elastic properties of the 3D printed gyroid infill // *Applied Sciences*. – 2022. – V. 12. – P. 2180.
4. Feng, Jiawei; Fu, Jianzhong; Yao, Xinhua and He, Yong Triply periodic minimal surface (TPMS) porous structures: from multi-scale design, precise additive manufacturing to multidisciplinary applications // *International Journal of Extreme Manufacturing*. – 2022. – V. 4. – P. 022001.
5. Hesselman, F.; Hawles, M.; Bongartz, P.; Wessling, Matthias et al. TPMS-based membrane lung with locally-modified permeabilities for optimal flow distribution // *Scientific Reports*. – 2022. – V. 12. – P. 7160.
6. Hussain, S.; Nazir, A.; Waqar, S.; Ali, Usman et al. Effect of additive manufactured hybrid and functionally graded novel designed cellular lattice structures on mechanical and failure properties // *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. – 2023. – V. 128. – P. 4873-4891.
7. Liu, J.; Cheng, D.; Oo, K.; McCrimmon, Ty-Liyiah et al. Design and additive manufacturing of TPMS heat exchangers // *Applied Sciences*. – 2024. – V. 14 (10). – P. 3970.
8. Luo, Z.; Tang, Q.; Ma, S.; Wu, X. et al. Effect of aspect ratio on mechanical anisotropy of lattice structures // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – V. 270. – P. 109111.
9. Piedra, S.; Gómez-Ortega, A.; Pérez-Barrera, J. Prediction of flow properties of porous triply periodic minimal surface (TPMS) structures // *Fluids*. – 2023. – V. 8. – P. 312.
10. Raju, S. Kamal K.; Onkar, Prasad S. Lattice Karak: Lattice structure generator for tissue engineering, light-weighting and heat exchanger applications // *Software Impacts*. – 2022. – V. 14. – P. 100425.
11. Schoen, Alan H. Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections. Washington, DC: NASA, 1970. – 92 p.
12. Siddique, Shakib H.; Hazell, Paul J.; Wang, Hongxu; Escobedo, Juan P. et al. Lessons from nature: 3D printed bio-inspired porous structures for impact energy absorption – A review // *Additive Manufacturing*. – 2022. – V. 58. – P. 103051.
13. Varygina, M. P. Numerical analysis of deformation under compression of structures based on triply periodic minimal surfaces // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2024. – №. 4. – P. 47-56.
14. Wan, M.; Hu, D.; Zhang, H. and Zhang, Z. Energy absorption characteristics of TPMS-filled square tubes under quasi-static axial crushing // *Thin-Walled Structures*. – 2024. – V. 199. – P. 111811.
15. Wang, E.; Yao, R.; Li, Q.; Hu, X. et al. Lightweight metallic cellular materials: A systematic review on mechanical characteristics and engineering applications // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – V. 270. – P. 108795.
16. Wang, Y.; Ren, X.; Chen, Z.; Jiang, Y. et al. Numerical and experimental studies on compressive behavior of Gyroid lattice cylindrical shells // *Materials and Design*. – 2020. – V. 186. – P. 108340.
17. Xiang-nan, K.; Bin, L.; Zhong-Hua, L.; Peng-Fei, Z. et al. Research on sound absorption properties of tri-periodic minimal surface sandwich structure of selective laser melting titanium alloy // *Materials Transactions*. – 2023. – V. 64 (4). – P. 861-868.
18. Yeranee, K.; Rao, Y. A review of recent investigations on flow and heat transfer enhancement in cooling channels embedded with triply periodic minimal surfaces (TPMS) // *Energies*. – 2022. – V. 15. – P. 8994.
19. Zhang, C.; Qiao, H.; Yang, L.; Ouyang, W. et al. Vibration characteristics of additive manufactured IWP-type TPMS lattice structures // *Composite Structures*. – 2024. – V. 327. – P. 117642.
20. Zhao, Y.; Wu, Q.; Zhao, C.; Zhou, H. et al. Progress of structural scaffold biomaterials for bone tissue defect repair: A cutting-edge review // *Composite Structures*. – 2024. – V. 349-350. – P. 118542.
21. Schwarz, H. A. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Berlin / Heidelberg: Springer, 1890. – 358 p.

Водинчар Г. М.

РАСЧЁТ И ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ СОБСТВЕННЫХ МОД СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО

Водинчар Г. М.
G. M. Vodinchar

**РАСЧЁТ И ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ СОБСТВЕННЫХ МОД СВОБОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО**

**CALCULATION AND APPLICATION OF APPROXIMATIONS FREE OSCILLATIONS
EIGENMODES OF A ROTATING SPHERICAL SHELL OF A VISCOUSE FLUID
FOR SIMULATION IN GEODYNAMO**

Водинчар Глеб Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН (Россия, Паратунка). E-mail: gvodinchar@ikir.ru.

Gleb M. Vodinchar – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS (Russia, Paratunka). E-mail: gvodinchar@ikir.ru.

Аннотация. Собственные моды свободных колебаний вращающейся сферической оболочки вязкой жидкости образуют физически естественный базис для представления скорости в галеркинских приближениях задачи геодинамо, однако точные аналитические выражения для этих мод неизвестны. Целью работы является получение методики расчёта аппроксимаций мод. Аппроксимации строятся в виде линейных комбинаций собственных мод аналогичной задачи для невращающихся оболочек, явные выражения которых известны и образуют полную ортогональную систему (базис). Расчёт в таком базисе матрицы оператора спектральной задачи для вращающейся оболочки позволил выделить инвариантные подпространства оператора. Разработана технология построения аппроксимаций мод в каждом из подпространств с помощью комбинированных символьно-численных вычислений. Если для представления скорости выбирать в каждом из подпространств по одной аппроксимации, то в системе галеркинских приближений исчезают кориолисовы члены. Это позволяет далее на несколько порядков увеличить временной шаг численного решения модели.

Summary. The eigenmodes of free oscillations of a rotating spherical shell of a viscous fluid form a physically natural basis for representing velocity in Galerkin approximations of the geodynamo problem, however, the exact analytical expressions for these modes are unknown. The aim of the work is to obtain a technique for mode approximations calculating. Approximations are constructed in the form of linear combinations of eigenmodes of a similar problem for non-rotating shells, the explicit expressions of which are known and form a complete orthogonal system (basis). The calculation of the spectral problem for a rotating shell operator matrix in such a basis allowed us to identify invariant subspaces of the operator. A technology has been developed for constructing approximations of modes in each of the subspaces using combined symbolic-numerical computations. If we select one approximation in each of the subspaces to represent the velocity, then the Coriolis terms disappear in the system of Galerkin approximations. This allows us to further increase the time step of the system integration by several orders.

Ключевые слова: геодинамо, метод Галеркина, собственные колебания, вращающиеся жидкие оболочки, символьно-численные вычисления.

Key words: geodynamo, Galerkin's method, free oscillations, rotating fluid shells, symbolic-numerical computations.

Работа выполнена за счёт Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. номер темы 124012300245-2).

УДК 532.5

Введение. Задача геодинамо представляет собой задачу о магнитогидродинамической конвекции проводящей вязкой несжимаемой жидкости во вращающейся сферической оболочке с твёрдыми границами (внешнее ядро Земли) [7]. Система уравнений геодинамо связывает поля

скорости, давления, температуры и магнитной индукции и включает уравнения Навье-Стокса с кориолисовым и лоренцевым членами, уравнение температуропроводности и уравнение индукции.

Для её исследования применяют различные численные методы, в том числе и метод Галеркина. Следует отметить, что хотя метод Галеркина и является по своему происхождению численным методом решения исходных уравнений, его можно рассматривать при малом числе мод как способ построения маломодовых (малоразмерных) моделей [1; 3]. Геометрически он выполняет тогда проектирование исходных уравнений на подпространства, порождаемые модами разложения. При его использовании возникает вопрос о выборе базисов для разложения полей. Особенно это важно при построении маломодовых моделей, поскольку комбинации небольшого числа мод должны описать пространственные структуры, типичные для рассматриваемой задачи. Необходимо, чтобы моды определяли некоторые физически естественные для задачи пространственные структуры. Таким строением обладают собственные моды малых свободных колебаний полей. Отметим сразу, что применение процедуры Галеркина исключает из уравнения Навье-Стокса член с давлением [1], поэтому выбирать базис для представления этого поля нет необходимости.

Для полей температуры и магнитной индукции решение спектральных задач о свободных колебаниях, т. е. явный вид уравнений на собственные значения и явный вид собственных мод известны. Есть и эффективная методика расчёта параметров мод и собственных значений, основанная на использовании методов компьютерной алгебры [8].

Для поля скорости у соответствующей спектральной задачи во вращающейся оболочке аналитическое решение неизвестно. Известен лишь ряд классических результатов для невязкого случая (задача Пуанкаре) [2; 4], некоторые способы введения поправок на вязкость [2], общие свойства оператора задачи [5]. Целью настоящего исследования является разработка методики расчёта аппроксимаций собственных мод скорости во вращающейся оболочке на основе комбинированных символьно-численных компьютерных вычислений.

Формулировка спектральной задачи. Спектральная задача о собственных модах скорости $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ свободных колебаний вязкой вращающейся жидкости в сферической оболочке Ω имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \vec{v} + \Delta \vec{v} - 2E^{-1} \vec{e}_z \times \vec{v} - \nabla p = 0, \quad \nabla \vec{v} = 0, \\ \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{r} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

где ε – собственное значение; E – число Экмана; p – поле давления. Безразмерная форма задачи (1) записана для случая, когда в качестве единицы длины взят внешний радиус R оболочки, а в качестве единицы времени взято характерное время вязкой диссипации R^2/ν , где ν – кинематическая вязкость. Число Экмана $E = \nu/(\omega R^2)$, где ω – угловая скорость вращения оболочки, является обратной безразмерной скоростью вращения.

Задача (1) рассматривается в гильбертовом пространстве H нулевых на $\partial\Omega$ комплексных соленоидальных векторных полей со скалярным умножением, определяемым следующим образом:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_v = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v}^* d\vec{r}, \quad (2)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение, а интегрирование ведётся по объёму оболочки.

Оператор этой спектральной задачи не обладает симметрией эрмитового или косэрмитового типа. Известно, что её спектр дискретный, а система собственных и присоединённых мод полная [5]. Аналитические решения и вид уравнений на собственные значения неизвестны. Однако по собственным модам этой задачи было бы удобно строить галеркинские приближения скорости в задаче геодинамо. Поскольку эти моды неизвестны, предлагается использовать их аппроксимации.

Расчёт аппроксимаций собственных мод. Аппроксимации собственных мод задачи (1) можно строить в виде линейных комбинаций собственных мод скорости для невращающейся оболочки, т. е. решений спектральной задачи:

$$\begin{aligned} \mu \bar{v} + \Delta \bar{v} - \nabla p &= 0, \quad \nabla \bar{v} = 0, \\ \bar{v} &= 0, \quad \bar{r} \in \partial \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Формально она получается из задачи (1) при бесконечном значении числа Экмана. В отличие от (1) эта задача самосопряжённая, известны явные выражения для собственных мод и уравнения на собственные значения [5; 8]. Ортогональная система её собственных мод полна в H . Будем далее считать систему мод нормированной. Известно, что собственные моды отдельно вычисляются в подпространствах тороидальных и полоидальных полей и в каждом подпространстве определяются мультииндексом (k, n, m) , где индексы $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = -n, \dots, n$ соответствуют дискретизации спектра (2) в радиальном, широтном и долготном направлениях. Добавим ещё и бинарный индекс типа моды: $type = T$ для тороидальной и $type = P$ для полоидальной. Получаем 4-компонентный мультииндекс, являющийся идентификатором собственных мод и собственных значений задачи (3). Методика расчёта параметров этих мод и собственных значений разработана и подробно описана в работе [8].

С помощью расчёта матрицы оператора Ψ задачи (1) в базисе из мод задачи (3) выделены инвариантные подпространства этого оператора. Они являются линейными оболочками мод со следующими множествами мультииндексов:

$$\begin{aligned} H_0^T &= \{(T, k_1, 1, 0), (P, k_2, 2, 0), (T, k_3, 3, 0), (P, k_4, 4, 0), \dots\}, \\ H_0^P &= \{(P, k_1, 1, 0), (T, k_2, 2, 0), (P, k_3, 3, 0), (T, k_4, 4, 0), \dots\}, \\ H_m^T &= \{(T, k_0, |m|, m), (P, k_1, |m|+1, m), (T, k_2, |m|+2, m), (P, k_3, |m|+3, m), \dots\}, \\ H_m^P &= \{(P, k_0, |m|, m), (T, k_1, |m|+1, m), (P, k_2, |m|+2, m), (T, k_3, |m|+3, m), \dots\}, \\ k_i &= 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Эти подпространства ортогональны относительно скалярного произведения (2) и в прямой сумме дают всё пространство H .

Решения задачи (1) и их аппроксимации строятся в каждом из подпространств, определяемых этими множествами. Пусть в одном из подпространств выделено конечное s -элементное множество мод \bar{v}_j и соответствующих собственных значений μ_j (где j – мультииндекс), на основе которых будут строиться аппроксимации мод задачи (1), и пусть эти s мод занумерованы в каком-либо порядке. Наиболее естественно их нумеровать в порядке возрастания собственных значений, что соответствует убыванию характерного времени диссипации этих мод. Отметим, что в пределах одного подпространства все собственные значения различны. В соответствии с этой нумерацией можно считать, что индекс $j = 1, 2, \dots, s$.

Далее ищется приближённое решение задачи (1) в виде

$$\bar{v} = x_1 \bar{v}_1 + x_2 \bar{v}_2 + \dots + x_s \bar{v}_s \quad (5)$$

методом Галеркина. Подстановка разложений (5) в задачу (1) и применение галеркинской процедуры приводит к ε -параметрической системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon x_k - \mu_k x_k - 2E^{-1} \sum_{j=1}^s \langle \bar{e}_z \times \bar{v}_j, \bar{v}_k \rangle_v x_j &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (6)$$

относительно коэффициентов аппроксимации (5). Нахождение значений параметра ϵ , при которых система (6) имеет ненулевые решения, и самих этих решений является задачей на собственные значения и векторы для $s \times s$ матрицы Ψ с элементами

$$\Psi_{ki} = \mu_k \delta_{ik} + 2E^{-1} \langle \vec{e}_z \times \vec{v}_i, \vec{v}_k \rangle_v, \quad (7)$$

где δ_{ki} – символ Кронекера. Методика расчёта скалярных произведений $\langle \vec{e}_z \times \vec{v}_i, \vec{v}_k \rangle_v$ с использованием сочетаний символьных и численных вычислений в системах компьютерной алгебры подробно описана в [8].

После вычисления элементов матрицы Ψ находятся её собственные значения и собственные векторы. Каждое собственное значение является аппроксимацией собственного значения задачи (1), а компоненты собственного вектора дают значения коэффициентов x_j в аппроксимациях вида (5) для собственных мод. В результате получаем s аппроксимаций мод в одном из подпространств.

В результате такого расчёта будут получены моды с комплексными элементами и комплексные значения коэффициентов x_j . Однако для задачи геодинамо нужны вещественные аппроксимации. В связи с этим надо сказать, что мнимые составляющие собственных мод задачи (3) из подпространств H_m^T и H_m^P обусловлены зависимостью этих мод от долготы ϕ в виде комплексной экспоненты $\exp(im\phi)$. Поэтому для каждой из аппроксимаций из некоторого подпространства с индексом m всегда найдётся сопряжённая аппроксимация из аналогичного подпространства с индексом $-m$. Суммируя их, получаем вещественную аппроксимацию. А для индекса $m = 0$ и сама матрица Ψ , и все её собственные значения будут вещественными.

Применение в задаче геодинамо. При построении галеркинских приближений в задаче геодинамо поля скорости, температуры и магнитной индукции представляются в виде разложений:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \sum_{l=1}^L \beta_l(t) \vec{v}_l(\vec{r}), \quad T(\vec{r}, t) = \sum_{s=1}^S \alpha_s(t) T_s(\vec{r}), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{p=1}^P \gamma_p(t) \vec{v}_p(\vec{r}). \quad (8)$$

Эти разложения подставляются в исходную систему, и применяется стандартная галеркинская процедура проектирования уравнений на подпространства мод. Если в качестве базисных мод используются собственные моды свободного затухания полей, то говорят о спектральной модели геодинамо. Модель включает как динамическую систему для амплитуд в разложениях (1), так и набор самих мод в этих разложениях.

Спектральные задачи для температурных и магнитных мод имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \lambda T + \Delta T &= 0, \quad T = 0 \text{ при } \vec{r} \in \partial\Omega, \\ \eta \vec{B} + \Delta \vec{B} &= 0, \quad \Xi \vec{B} = 0 \text{ при } \vec{r} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где оператор граничных условий Ξ является линейным и однородным. Конкретный вид этого оператора не играет роли для целей настоящей работы. Его можно посмотреть, например, в [8], но общий смысл граничных условий для магнитной индукции – это ограниченность в центре ядра и непрерывный переход на внешней границе ядра в потенциальное поле, определяемое гармоническим потенциалом. Это так называемые вакуумные граничные условия для магнитного поля [7]. Отметим также, что поле T – это не полная температура, а отклонение температуры от равновесного гиперболического по радиусу профиля, соответствующего кондуктивному переносу тепла. Именно с этим связаны нулевые граничные условия для T .

Задачи (9) являются самосопряжёнными относительно скалярных произведений:

$$\langle T_1, T_2 \rangle_T = \int_{\Omega} T_1 \cdot T_2 \, d\vec{r} \quad \text{и} \quad \langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle_B = \int_{\Omega} \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 \, d\vec{r},$$

системы их собственных мод полны. Схема расчёта собственных мод и собственных значений описана в [8].

Модами скорости \vec{v}_l являются некоторые аппроксимации собственных мод задачи (1).

Динамическая система для амплитуд в разложениях (8) имеет квадратично-нелинейный вид с постоянными коэффициентами [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_l}{dt} &= \sum_{i,j=1}^L B_{lij}\beta_i\beta_j - \tilde{\varepsilon}_l\beta_l + E^{-1}\sum_{i=1}^L E_{li}\beta_i + Ra Pr^{-1}\sum_{i=1}^S D_{li}T_i + \sum_{i,j=1}^P Q_{lij}\gamma_i\gamma_j, \\ & l = 1, 2, \dots, L, \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L,S} F_{sij}\beta_i\alpha_j + \sum_{i=1}^L H_{si}\beta_i - Pr^{-1}\lambda_s\alpha_s, \\ & s = 1, 2, \dots, S, \\ \frac{d\gamma_p}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L,P} W_{pij}\beta_i\gamma_j - Pm^{-1}\eta_p\gamma_p, \\ & p = 1, 2, \dots, P, \end{aligned} \quad (10)$$

где Ra – число Релея, определяющее интенсивность конвективного процесса, а число Прандтля Pr и магнитное число Прандтля Pm дают характерные времена диффузии тепла и магнитной диссипации во временном масштабе вязкой диссипации. Физический смысл числа Экмана E выше уже описывался. Положительные λ_s и η_p являются собственными значениями температурных и магнитных мод, а положительные $\tilde{\varepsilon}_l = -\langle \vec{v}_l, \Delta \vec{v}_l \rangle_v$.

Остальные коэффициенты в (10), обозначенные прописными буквами с нижними индексами, являются коэффициентами Галеркина. Выделим особо коэффициенты, являющиеся мерами кориолисова взаимодействия мод скорости:

$$E_{li} = \langle \vec{e}_z \times \vec{v}_i, \vec{v}_l \rangle_v.$$

Очевидно, что $E_{ll} = 0$ и $E_{il} = -E_{li}$. Из выражения спектральной задачи (1) и инвариантности подпространств (4) относительно оператора задачи (3) видно, что $E_{li} = 0$, если \vec{v}_l и \vec{v}_i из разных подпространств.

Будем теперь считать, что базисные моды скорости \vec{v}_l взяты по одной из нескольких подпространств (4). Тогда из системы (10) исчезают все кориолисовы члены. На первый взгляд может показаться, что из спектральной модели исчезла информация о вращении ядра. Однако в действительности она сохраняется в самих выражениях для базисных мод, поскольку коэффициенты аппроксимаций определяются как компоненты собственных векторов матрицы (7), а её элементы зависят от числа Экмана, т. е. от безразмерной скорости вращения. Поэтому пространственная структура мод скорости соответствует как самому факту вращения, так и его скорости. А эта структура отражается в величине коэффициентов Галеркина.

Такой подход позволяет существенно сократить временной шаг интегрирования системы (10). Действительно, характерные времена процессов в крупномасштабном динамо составляют $\sim 10^3$ лет, а из-за кориолисова члена шаг приходится выбирать не более полусуток. Если же кориолисов член исключён из системы, то шаг интегрирования определяется минимальным из трёх времён: время вязкой диссипации (выбрано за единицу в (10)), время тепловой диффузии Pr , время магнитной диссипации Pm . При турбулентных значениях диффузионных коэффициентов (кинематической вязкости, температуропроводности, магнитной вязкости) для ядра Земли [6] получаем, что $Pr = 10^4$, $Pm = 5$. Характерное же время вязкой диссипации $\sim 4 \cdot 10^3$ лет. Поэтому



исключение кориолисова члена позволяет увеличить временной шаг численного решения системы (10) на 5-6 порядков.

Заключение. В работе получена методика расчёта аппроксимаций собственных мод свободных колебаний вязкой жидкости во вращающейся сферической оболочке. Она основана на применении комбинированных символьно-численных вычислений, которые могут быть реализованы в математических пакетах, поддерживающих операции векторного анализа в сферических координатах. Автором работы эта методика реализована в системе Maple.

Использование получаемых аппроксимаций в качестве базисных мод скорости при построении спектральных моделей геодинamo позволяет значительно (на 5-6 порядков) увеличить шаг численного решения спектральной модели по времени. Это даёт возможность рассчитывать временную динамику полей геодинamo на геологических масштабах времени, что позволяет, например, сравнивать статистические характеристики модельной шкалы магнитной полярности и реальной палеомагнитной шкалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гледзер, Е. Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
2. Гринспен, Х. П. Теория вращающихся жидкостей / Х. П. Гринспен. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 303 с.
3. Монин, А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики / А. С. Монин. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 424 с.
4. Резников, Е. Л. О гладких приближениях собственных мод оператора Пуанкаре в шаровом слое / Е. Л. Резников, Л. М. Розенкноп // Вычислительная сейсмология. – 1994. – Вып. 27. – С. 70-85.
5. Розенкноп, Л. М. О собственных колебаниях вращающейся вязкой жидкости во внешнем ядре Земли / Л. М. Розенкноп, Е. Л. Резников // Вычислительная сейсмология. – 1998. – Вып. 30. – С. 121-132.
6. Решетняк, М. Ю. Моделирование процессов динамо в геофизике: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 25.00.10 / Решетняк Максим Юрьевич; Институт физики Земли им. Г. А. Гамбурцева. – М., 2003. – 302 с.
7. Merrill, R., McElhinny, M., McFadden, P. The Magnetic Field of the Earth / R. Merrill, M. McElhinny, P. McFadden. – N.Y.: Acad. Press, 1996. – 532 p.
8. Vodinchar, G., Feshchenko, L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System / G. Vodinchar, L. Feshchenko // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – № 13. – 3000. – DOI: 10.3390/math11133000.

Одинок В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Чернышова Д. В.
МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕГОСЯ
В ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ МЕТАЛЛА, ИМЕЮЩЕГО ДЕФЕКТЫ В ВИДЕ ПУСТОТ

Одинок В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Чернышова Д. В.
V. I. Odinokov, A. I. Evstigneev, E. A. Dmitriev, Yu. B. Koloshenko, D. V. Chernyshova

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕГОСЯ В ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ МЕТАЛЛА, ИМЕЮЩЕГО
ДЕФЕКТЫ В ВИДЕ ПУСТОТ**

**MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF METAL CRYSTALLIZING IN SHELL FORM,
HAVING DEFECTS IN THE FORM OF VOIDS**

Одинок Валерий Иванович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: 79122718858@yandex.ru.

Valeriy I. Odinokov – Doctor of Engineering, Professor, Chief Scientific Associate, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: 79122718858@yandex.ru.

Евстигнеев Алексей Иванович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: diss@knastu.ru.

Aleksey I. Evstigneev – Doctor of Engineering, Professor, Chief Scientific Associate, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: diss@knastu.ru.

Дмитриев Эдуард Анатольевич – доктор технических наук, профессор, ректор Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: innov@knastu.ru.

Eduard A. Dmitriev – Doctor of Engineering, Professor, Rector, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: innov@knastu.ru.

Колошенко Юлия Борисовна – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: koloschenko2011@yandex.ru.

Yuliya B. Koloshenko – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: koloschenko2011@yandex.ru.

Чернышова Дарья Витальевна – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: daracernysova744@gmail.com.

Dariya V. Chernyshova – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: daracernysova744@gmail.com.

Аннотация. Сформулирована задача по определению напряжённо-деформированного состояния (НДС) в отливке, полученной в литейной форме, опирающейся на опорную конструкцию (ОК), при охлаждении в ней затвердевающей стальной сферической отливки. Рассматривается осесимметричное тело вращения, имеющее четыре области: жидкий металл, твёрдый металл, литейная форма, опорная конструкция. Для решения задачи используется уравнение линейной теории упругости, уравнение теплопроводности и апробированный численный метод, согласно которому исследуемая область разбивается системой ортогональных поверхностей на элементы. Для каждого элемента записывается сформулированная система уравнений в разностном виде. Приведена численная схема и разработан алгоритм решения задачи. Рассмотрена задача по кристаллизации стальной отливки в гидростатическом поле.

Summary. The problem of determining the stress-strain state (VAT) in a casting obtained in a casting mold based on a support structure (OC) when cooling a solidifying spherical steel casting in it is formulated. An axisymmetric body of rotation is considered, which has four regions: liquid metal, solid metal, casting mold, and supporting structure. To solve the problem, the equation of the linear theory of elasticity, the equation of thermal conductivity and a proven numerical method are used, according to which the studied area is divided by a system of orthographic surfaces into elements. For each element, a formulated system of equations is written in a differential form. A numerical scheme is given and an algorithm for solving the problem is developed. The problem of crystallization of a steel casting in a hydrostatic field is considered.

Ключевые слова: отливка, дефекты, напряжённое состояние, моделирование, численная схема, алгоритм решения.

Key words: casting, defects, stress state, modeling, numerical scheme, solution algorithm.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>.

УДК 539.37

Введение. Получение металлических деталей сложной конфигурации осуществляется путём разлива металла в разъемную металлическую форму или в керамическую форму, которую разрушают при извлечении затвердевшей отливки. В процессе затвердевания металла (особенно в начальный момент) могут появляться раковины, пузыри от выделяющихся из жидкого металла газов. Этим дефектам можно избежать, если на кристаллизующийся металл будет действовать определённой величины гидростатическое давление [1]. Цель данной работы – разработка математической модели процесса охлаждения, кристаллизации и залечивания возможных дефектов (пустот) в отливке, затвердевающей в форме. Для реализации такой математической модели использованы уравнения механики сплошных сред, уравнения теплопроводности и апробированные численные методы. Рассмотрим данную задачу в осесимметричной постановке. На рис. 1 показан фрагмент области, вращающейся вокруг оси I-I и состоящей из жидкого металла I, твёрдого металла II, литейной формы III, опорной конструкции IV, а также дефект A в виде раковины (пустоты). Будем полагать, что дефект A опоясывает относительно оси I-I всю область затвердевшей корочки. Тогда получаемая отливка не теряет осесимметричной формы. Форма III опирается поверхностью в опорную конструкцию (ОК).

Математическая постановка задачи. Имеем осесимметричное тело вращения. С учётом осевой симметрии рассмотрим сечение в плоскости $x_3 = \text{const}$ (см. рис. 1). При этом дефект (полость) в затвердевшем металле будем имитировать внутренним полым кольцом.

Используя теорию малых упругопластических деформаций и Эйлерову систему координат, запишем для каждой из областей систему уравнений.

Область I (жидкий металл):

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = P_1; \quad \dot{\theta} = a_1 \Delta \theta. \quad (1)$$

Область II, III (закристаллизовавшийся твёрдый металл, форма):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2G_p \varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \cdot \delta_{ij}; \\ \varepsilon &= \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta - \theta_p^*); \\ \varepsilon_{ij} &= 0,5(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \dot{\theta} = a_p \Delta \theta; \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ – гидростатическое напряжение; δ_{ij} – символ Кронекера; G_p ($p = \text{II}, \text{III}$) – модуль сдвига металла ($p = \text{II}$) и формы ($p = \text{III}$); ε_{ij} – деформации; k_p – коэффициенты объёмного сжатия; α_p – коэффициенты линейного расширения; θ – текущая температура; θ_p^* – начальные температуры в области p ($p = \text{II}, \text{III}$); U_i – перемещения; a_p – коэффициенты теплопроводности ($p = \text{II}, \text{III}$). В формулах (2) осуществляется суммирование по повторяющимся индексам i, j .

В процессе охлаждения жидкого металла при условии, что температура металла $\theta_{met} \leq \theta_{cr}$ (θ_{met} – температура жидкого металла, θ_{cr} – температура кристаллизации), определяется толщина затвердевшего слоя из решения межфазового перехода:

$$\frac{d\theta_1}{dn} \lambda_1 - \frac{d\theta_2}{dn} \lambda_2 = \frac{d\Delta}{d\tau} L\rho, \quad (3)$$

где θ_1 и θ_2 – соответственно температуры в твёрдой и жидкой фазах; λ_1 и λ_2 – соответственно коэффициенты теплопроводности в твёрдой и жидкой фазах; n – нормаль к границе двух фаз; Δ – толщина корочки; L – скрытая теплота плавления; ρ – плотность твёрдой фазы (см. рис. 2). Если предположить, что температура в твёрдой фазе (корочке) изменяется по линейному закону, а градиент температуры в жидкой фазе равен нулю, то уравнение межфазового перехода (3) примет вид

$$\frac{\Delta\theta_1}{x} \lambda_1 = \frac{dx}{d\tau} L\rho.$$

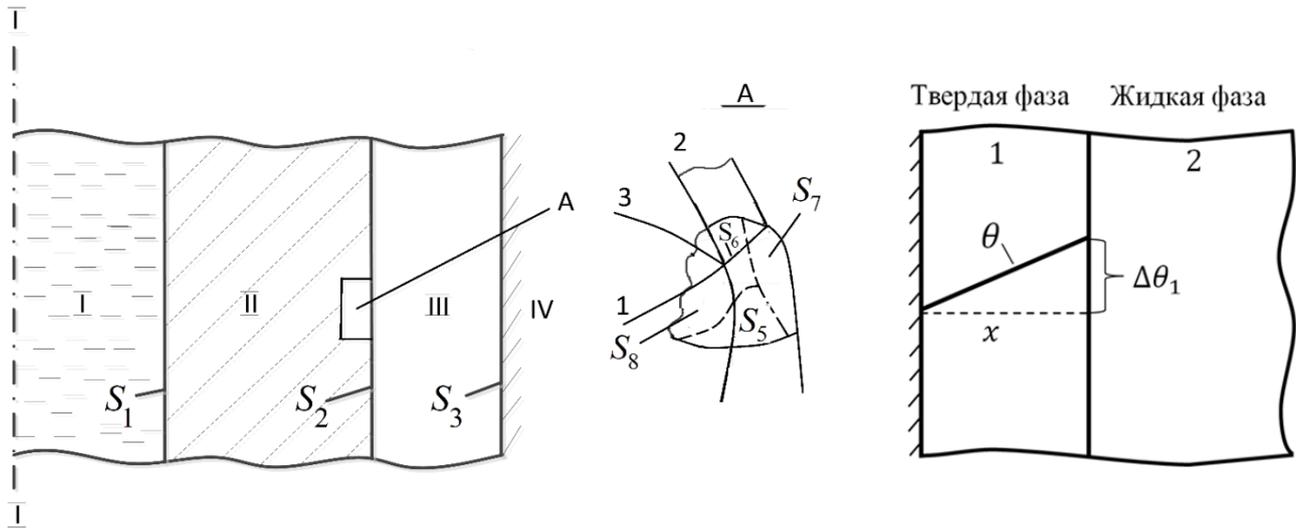


Рис. 1. Схема фрагментов областей исследуемой системы:
 I – жидкий металл; II – твёрдый металл (корочка);
 III – литейная форма; IV – опорная конструкция

Рис. 2. Схема изменения градиента температуры в затвердевшей корочке металла:
 1 – твёрдая фаза, 2 – жидкая фаза

После интегрирования получили $x = C\sqrt{\tau}$.

Так как рассматривается временной шаг $\Delta\tau_n$ и $x = \Delta_n$, то имеем формулу

$$\Delta_n = C\sqrt{\Delta\tau_n}, \quad C = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_1\lambda_1}{\rho L}}, \quad (4)$$

где Δ_n – толщина закристаллизовавшейся корочки; $\Delta\theta_1$ – перепад температур в твёрдой фазе вблизи фронта кристаллизации.

Время процесса кристаллизации τ^* разбивается на малые шаги $\Delta\tau_n$ (n – номер временного шага). На каждом временном шаге $\Delta\tau_n$ вычисляется толщина твёрдой фазы Δ_n ($\Delta = \sum_1^n \Delta_n$).

Для решения системы (2) с учётом (1) использовался апробированный численный метод, описанный в работе [3]. Согласно данному методу, область деформирования разбивается на конечное число ортогональных криволинейных элементов (рис. 3, а). На рис. 3, в, з показано распределение напряжений σ_{ij} и перемещений U_{ij} по граням элемента.

При осевой симметрии имеем

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad U_3 = 0. \quad (5)$$

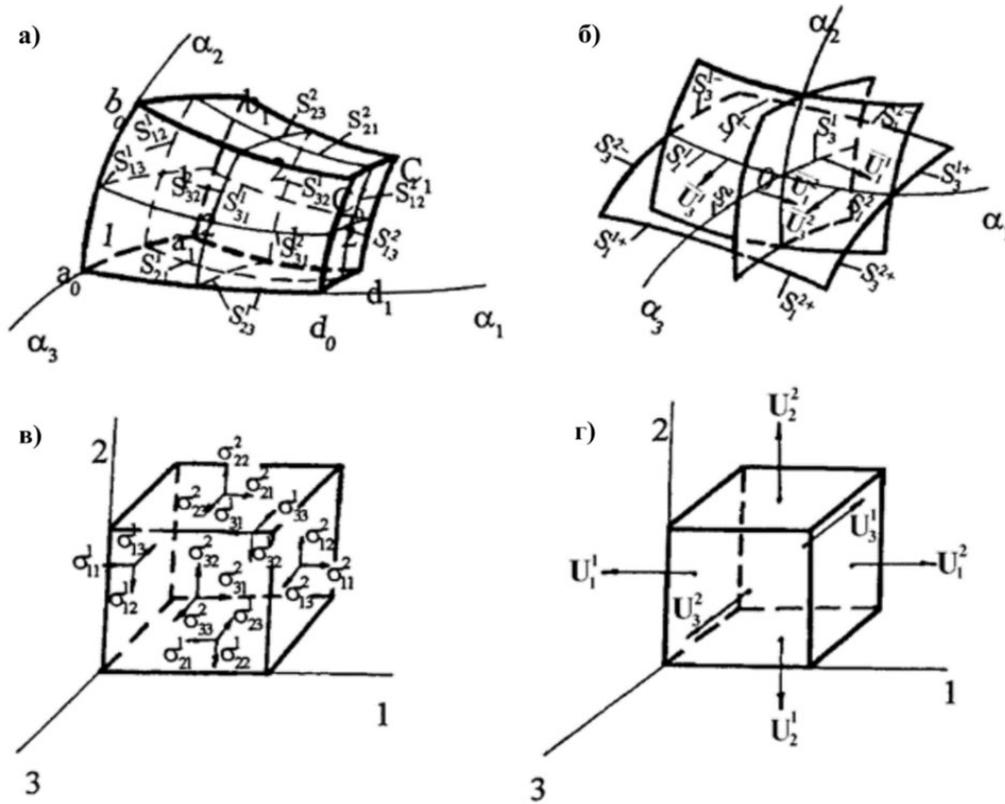


Рис. 3. Область деформирования: а – схема разбивки на элементы; б – распределение перемещений по границам граней элемента; в – распределение напряжений; г – распределение перемещений по граням элемента

В соответствии с работой [3] уравнения (2) и значения ε_{ij} с учётом (5) запишутся

$$S_{13}\Delta S_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + S_{12}\Delta S_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + 0,5\Delta\sigma_{11}S_{12}S_{13} + 0,5\Delta\sigma_{12}S_{21}S_{23} + (S_{21}\Delta S_{23} + 2S_{23}\Delta S_{21})\sigma_{12} = 0; \quad (6)$$

$$S_{21}\Delta S_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + S_{23}\Delta S_{21}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 0,5\Delta\sigma_{22}S_{23}S_{21} + 0,5\Delta\sigma_{21}S_{12}S_{13} + (S_{12}\Delta S_{13} + 2S_{13}\Delta S_{12})\sigma_{21} = 0;$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}); \quad (7)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = 2G_p(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33});$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3k_p\sigma + 3\alpha_p(\theta_n - \theta_p^*), \quad (8)$$

где $\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)$, $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1$, $(i, j = 1, 2, 3)$;

$$\varepsilon_{11} = \frac{2\Delta U_1}{S_{21}} + \frac{2U_2}{S_{21}} \cdot \frac{\Delta S_{21}}{S_{12}}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{2\Delta U_2}{S_{32}} + \frac{2U_1}{S_{12}} \cdot \frac{\Delta S_{12}}{S_{21}}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{2U_1}{S_{13}} \cdot \frac{\Delta S_{13}}{S_{31}} + \frac{2U_2}{S_{23}} \cdot \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}},$$

здесь $U_i = U_i^1 + U_i^2$; $\Delta U_i = U_i^2 - U_i^1$, $(i = 1, 2)$.

При этом S_{ik}^j ($i, k = 1, 2, 3; j = 1, 2$) – величина дуги средней линии, расположенной на грани j вдоль координаты α_k и перпендикулярная координате α_i . Значения S_{ik}^j вычисляются как средние

от значений дуг границы граней. Вводятся обозначения $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$, $\Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$. Расположение σ_{ij} и U_i по граням элемента показано на рис. 3, в, з.

Уравнения (6), (9) записаны с учётом осевой симметрии:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} = 0; \quad i = 1, 2, 3,$$

для тел вращения имеет место

$$\Delta S_{31} = 0; \quad \Delta S_{32} = 0; \quad \frac{\Delta \bar{U}_1}{S_3} = 0; \quad \frac{\Delta \bar{U}_2}{S_3} = 0; \quad U_3 = 0.$$

Сдвиговые значения ε_{ij} ($i \neq j$) для узла (0) запишутся в виде

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{2\Delta \bar{U}_2}{S_1} - 0,5\bar{U}_2 \frac{S_2^+ - S_2^-}{S_1 S_2} + \frac{2\Delta \bar{U}_1}{S_2} - 0,5\bar{U}_1 \frac{S_1^+ - S_1^-}{S_1 S_2}, \quad (10)$$

где $S_i = S_i^1 + S_i^2$; $\Delta \bar{U}_i = \bar{U}_i^2 - \bar{U}_i^1$; $S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}$; $S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}$; значения \bar{U}_i^j вычисляются как средние от значения U_i по граням элемента. В работе [3] доказано, что разностный аналог системы (6)–(8) с учётом (9) при наличии начальных и граничных условий является определимым. Размерность системы (6–8) значительно сокращается, если разбить все неизвестные на две группы: зависимые переменные и независимые.

В работах [2; 3] свёртка системы (6)–(8) проводилась для односвязной области. Наличие дефекта (пустоты) делает рассматриваемую область многосвязной. Это усложняет процедуру свёртки.

Пусть ко второй группе относятся все значения U_2 , не вошедшие в граничные условия, гидростатическое напряжение σ , а также $U_1|_{S_8}$, $U_1|_{S_3'}$, тогда:

1. Из уравнения сохранения массы (8) выразим в рекуррентной форме с учётом выражений (9)

$$U_1^2 = U_1^1 + [A],$$

где $[A]$ – оператор, не содержащий U_1^2 ; направление обхода области по $x_1(\rightarrow)$, по $x_2(\uparrow)$.

2. Определяем сдвиговые выражения ε_{ij} ($i \neq j$) по внутренним узлам сетки в соответствии с формулой (10); $i = 1, j = 2$.

3. Определяем σ_{ij} ($i \neq j$) по внутренним узлам сетки из уравнений состояния: $\sigma_{12}^0 = G_p^0 \varepsilon_{12}^0$.

4. Определяем σ_{ij} по внешним узлам сетки из граничных условий, а на контактных поверхностях – из закона трения.

5. Определяем σ_{ij} по граням элементов как средние от значений σ_{ij} в узлах граней.

6. Разности ($\sigma_{ii} - \sigma_{jj}$) в уравнениях (6) выражаются через (7).

7. Уравнения (6) переписываются в рекуррентном виде:

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 + [B_i], \quad i = 1, 2;$$

где $[B_i]$ – операторы, не содержащие σ_{ij}^1 , направление обхода области $x_1(\leftarrow)$, $x_2(\downarrow)$.

8. При встрече с дефектом имеем уравнения

$$F_i = \sigma_{ii}^2|_{S_k} + [B_k] = 0,$$

$$i = 1 \Rightarrow k = 8,$$

$$i = 2 \Rightarrow k = 6.$$

9. Первое из уравнений (7) перепишем в виде

$$F_4 = \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0.$$

Направление обхода области по $x_1(\rightarrow)$, по $x_2(\uparrow)$; этих уравнений столько, сколько неизвестных перемещений U_2 .

10. Из второго уравнения (7) определяем

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}),$$

где ε_{22} , ε_{33} вычисляются по формулам (9).

11. Уравнения по гидростатическому напряжению

$$F_5 = 1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \sigma = 0$$

содержат напряжения по гидростатическому напряжению в элементе, кроме элементов содержащих дефекты.

Таким образом, если положить за независимые переменные $X = \{U_2, \sigma, U_1|_{S'_3}\}$, то пробегая вышеуказанную последовательность, можем определить зависимые переменные через X .

Эквивалентная система уравнений состоит из выражений

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_{11}^2|_{S_8} + [B_8] = 0; \\ F_2 &= \sigma_{22}^2|_{S_6} + [B_6] = 0; \\ F_3 &= \sigma_{11}^2|_{S'_3} + [B_6] = 0; \end{aligned} \tag{11}$$

$$F_4 = \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2G_p(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0;$$

$$F_5 = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sigma = 0.$$

Таким образом, система, получаемая непосредственной аппроксимацией исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных конечными разностями, преобразуется в эквивалентную систему алгебраических линейных уравнений, число уравнений в которой примерно на порядок меньше, чем в исходной. Если положить $G_p = \text{const}$, то система (11) будет линейной.

Коэффициенты и свободные члены новой линейной эквивалентной системы уравнений можно найти с помощью следующей процедуры.

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\bar{F}_i = a_{ij}x_j + b_i = 0; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Если положить все неизвестные равными нулю $x_i = 0, i = 1, \dots, n$, то, пробегая вышеприведённую последовательность и насчитывая \bar{F}_i по формулам (11), найдём свободные члены новой системы:

$$\bar{F}_i^0 = b_i; \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее находим коэффициенты a_{ij} . Для этого положим $x_k = 1, x_i = 0, (i \neq k; i = 1 \dots n)$. Опять, пробегая вышеуказанную последовательность, находим \bar{F}_i^k и a_{ik} по формуле

$$a_{ik} = \frac{\bar{F}_i^k - \bar{F}_i^0}{1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, определяется вся матрица a_{ik} новой эквивалентной системы. Решение этой системы осуществляем по стандартной программе методом Гаусса. Для решения уравнения теплопроводности используется численный метод, описанный в работе [3]. При этом будем считать область односвязной, т. е. не учитывать появляющиеся пустоты области Π . В соответствии с данным методом для каждого внутреннего k -го элемента записывается тепловой баланс, из которого выводится уравнение теплопроводности в разностном виде и строится итерационная процедура, которая с учётом того, что тепловой поток по α_3 равен нулю, представляется итерационной формулой:

$$\theta_k = \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{22}\theta_2^+ + t_{21}\theta_2^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21}},$$

где θ_k^* – средняя температура в k -м элементе в начале временного шага $\Delta\tau$;

$$t_{12} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^2 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}; \quad t_{11} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{21} + S_{21}^-} F_1^1 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k};$$

$$t_{22} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^+)}{S_{12} + S_{12}^+} F_2^2 \frac{\Delta\tau}{G_k \gamma_k V_k}; \quad t_{21} = \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^-)}{S_{12} + S_{12}^-} F_2^1 \frac{\Delta\tau}{G_k \gamma_k V_k};$$

$$F_i^j = S_{ik}^j \cdot S_{ip}^j; \quad i \neq k \neq p; \quad i, k, p = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2; \quad V_k = \frac{S_{13} S_{12} (S_{21} + S_{31})}{16},$$

$\lambda_k, \theta_k, C_k, \gamma_k$ – соответственно средние значения коэффициента теплопроводности, температуры, теплоёмкости и удельный вес в k -м элементе в конце временного шага $\Delta\tau$; λ_i^-, θ_i^- ($i = 1, 2$) – соответственно коэффициенты теплопроводности и температуры в элементе, следующем за элементом k по координате x_i в отрицательную сторону; λ_i^+, θ_i^+ – аналогичные параметры в положительном направлении x_i ;

$$S_{21}^- = S_{21}^{1-} + S_{22}^{2-}; \quad S_{21}^+ = S_{21}^{1+} + S_{21}^{2+};$$

здесь S_{ij}^{1+} ($i \neq j; i, j = 1, 2$) – длина дуги S_{ij}^1 – элемента, следующего за элементом k в положительном направлении по координате x_j ; S_{ij}^{1-} – то же, но в отрицательном по x_j ; θ_i^+ – температура в элементе, следующем за элементом k в положительном направлении x_i ; θ_i^- – то же, но в отрицательном направлении x_i .

Алгоритм численного решения задачи:

1. Время охлаждения τ^* разбивается на конечное число шагов: $\tau^* = \sum \Delta\tau_n$, n – номер временного шага.
2. Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов.
3. Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующим рассматриваемую область, и константы физико-механических свойств материалов.
4. Вычисляются длины дуг элементов S_{ik}^j ($i, k = 1, 2; i \neq k; j = 1, 2$).
5. Определяется поле температур на временном шаге $\Delta\tau_n$ численным решением уравнения теплопроводности с использованием итерационной формулы (11) при наличии начальных и граничных условий на данном временном шаге.
6. Если температура в области (I) у поверхности $S_2 \theta|_{S_2} \leq \theta_{II}^*$, то вычисляется толщина закристаллизовавшейся корочки Δ_n по формуле (4). Если $\theta|_{S_2} > \theta_{II}^*$, то выполняется п. 7.
7. Решается система уравнений (11) с учётом разностных аналогов (6), (7), (9) и разработанной методики, описанной выше. Определяются поля напряжений σ_{ij} и перемещений U_i .
8. На поверхности S_3 производится оценка прилегания формы к ОК по каждому элементу, если $\sigma_{11}|_{S_3} > 0 \Rightarrow \sigma_{11} = 0$, формируется поверхность S_3' , выполняется п. 7.
9. Производится шаг по времени. Если $\sum \Delta\tau_n < \tau^*$, то выполняется п. 4. Если $\sum \Delta\tau_n = \tau^*$, процесс вычисления закончен.

Решение задачи. Выше даны общая постановка задачи и математическая модель для осесимметричной конструкции оболочковой формы (ОФ), имеющей дефекты в виде раковин (пустот) в кристаллизующемся металле.

Рассмотрим частный случай – залив жидкой стали в металлическую форму (см. рис. 4, а).

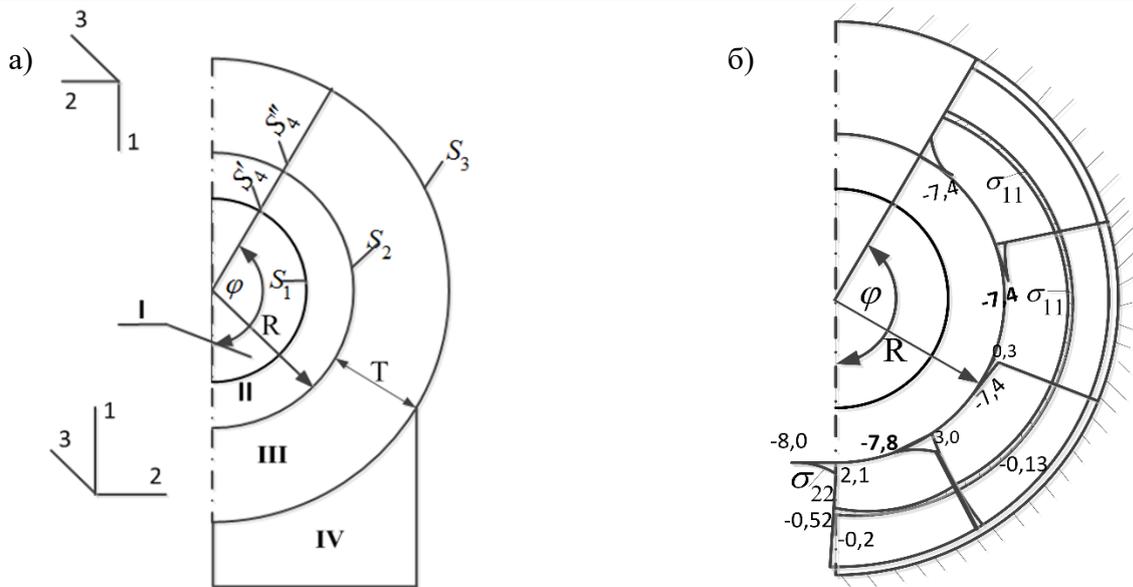


Рис. 4. Расчётная схема системы с указанием поверхности к граничным условиям задачи (а): S_1 – поверхность контакта жидкого и затвердевшего металла; S_2 – внутренняя поверхность контакта затвердевшего металла и металлической формы; S_3 – внешняя поверхность металлической формы; T – толщина литейной формы; эпюры нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} в области II при $\tau = 0,1$ с (б)

Начальные условия задачи:

1. $\Delta|_{\tau=0} = 0$ – отсутствие твёрдой фазы металла;
2. $\theta_I|_{\tau=0} = \theta_0$ – температура разливаемого жидкого металла;
3. $\theta_{III}^*|_{\tau=0} = \theta^*$ – начальная температура формы;
4. θ_{II} – температура матрицы;
5. θ_{II}^* – температура кристаллизации металла.

Граничные условия задачи (см. рис. 4, а):

- на оси симметрии $U_2 = 0$; $\sigma_{21} = 0$; $q_n = 0$;
- на поверхностях S_1, S_3, S_4 .

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_1} &= P_1; \sigma_{12}|_{S_i} = 0, (i = 7,8); \sigma_{11}|_{S'_3} = 0, (i = 7,8); \\ \sigma_{12}|_{S''_3} &= 0, \sigma_{22}|_{S_i} = 0, (i = 5,6), \sigma_{22}|_{S''_4} = P_1; \\ U_1|_{S'_3} &= 0, \sigma_{22}|_{S_i} = 0, (i = 5,6), \quad U_2|_{S'_4} = 0, \sigma_{21}|_{S_i} = 0; (i = 4,5,6); \\ \sigma_{12}|_{S'_3} &= -\Psi \frac{U_{\text{ск}}}{U^*} \cos(n_1 \alpha_1); \theta|_{S_3} = \theta^*, \end{aligned}$$

где Ψ – параметр, характеризующий условия трения между формой и ОК; $U_{\text{ск}}$ – скольжение материала формы относительно ОК; U^* – нормирующее перемещение; $q_n|_{S_3}$ – плотность теплового потока по нормали к поверхности S_3 ; $S_3 = S'_3 + S''_3$, здесь S'_3 – свободная поверхность, S''_3 – контактная поверхность. При решении температурной задачи использовались граничные условия первого рода. С этой целью воспользуемся данными работы [4].

$$\theta_M = 1550 - 1,666\tau - \tau(60 - \tau) / (10 + \tau^2); \theta \leq \tau \leq 60 \text{ с};$$

$$\theta^*|_{S_3} = 20 + 17,3\sqrt{\tau},$$

где τ – время охлаждения, с.

Исходные данные:

Геометрические параметры: $T = 50$ мм, $R = 20$, $\varphi = 1500^\circ$.

Временные интервалы $\Delta\tau_n$: 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 2,0; 5,0; 6,0; 8,0; 9,0 с; параметр трения $\psi = 0,001$.

Разбиение области: $N1 \times N2 = 15 \times 20$.

Приняты следующие физические параметры разливаемой стали при температуре $\theta > 1000^\circ\text{C}$ ($\theta_{met}^* = 1500^\circ\text{C}$): $G = 1000$ кг/мм²; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹; $\lambda = 0,0298$ Вт/(мм \cdot °C); $L = 270 \cdot 10^3$ Дж/кг (скрытая теплота плавления); $C = 444$ Дж/(кг \cdot °C); $\gamma = 7,80 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³; $\theta_k = 1450^\circ\text{C}$.

Физические свойства металлической формы такие же, что и физические параметры разливаемой стали, но

$$G = 8100 [1 - 1,2 \cdot (Q/1000)^2].$$

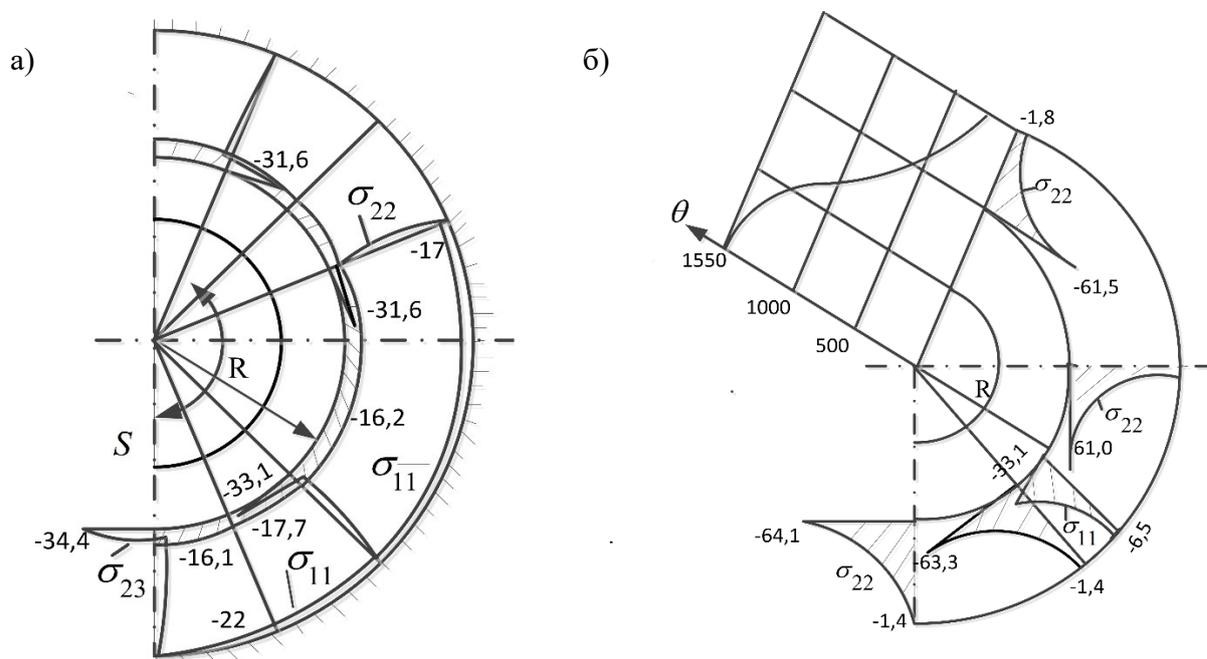


Рис. 5. Эпюры нормальных напряжений σ_{11} и σ_{22} в области II: а – при $\tau = 1,15$ с; б – при $\tau = 8,65$ с

На рис. 4, б и рис. 5, б приведены некоторые результаты расчётов поставленной задачи. На рис. 4, б и рис. 5 изображены эпюры σ_{11} , σ_{22} в металлической форме в различные временные интервалы при отсутствии дефекта в области II. Сжимающие напряжения σ_{22} на стыке формы с разливаемым металлом увеличиваются (по модулю) до 8,65 с, затем температура в форме начинает выравниваться и сжимающие напряжения σ_{22} также выравниваются по сечению, уменьшаясь по модулю.

При наличии гидростатического давления $P_1 = 100$ атм, 300 атм на рис. 6 показаны перемещения u_1 в области дефекта (раковины), которая может появиться при кристаллизации металла вблизи поверхности металлической формы.

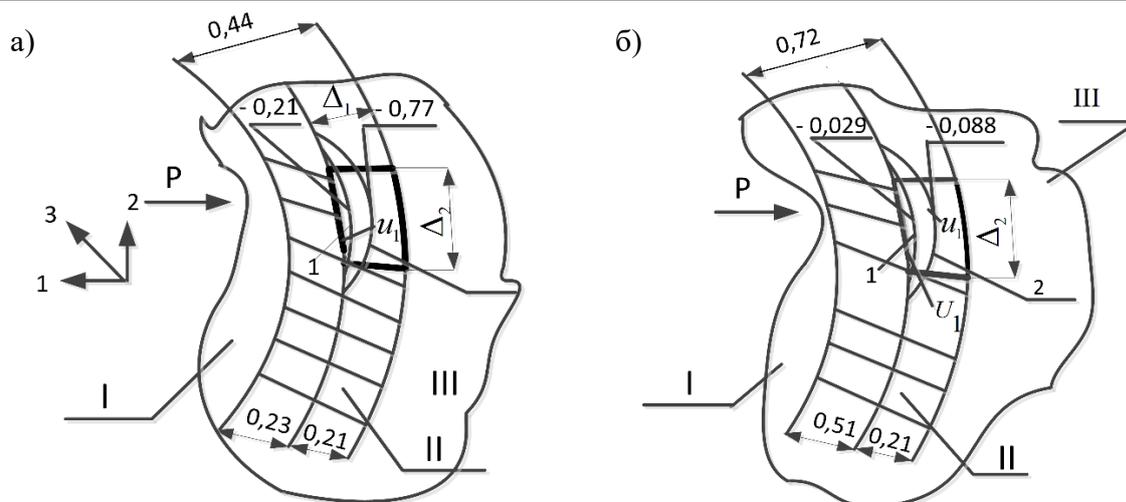


Рис. 6. Перемещение u_1 в затвердевшей корочке металла при гидростатическом давлении $P_1 = 100$ атм (1), 300 атм (2): а – дефект на поверхности формы при толщине корочки над дефектом 0,13 мм, $\tau = 0,16$ с; б – при толщине корочки 0,51 мм, $\tau = 1,16$ с

На рис. 6, а дефект расположен на поверхности формы ($\Delta_1 = 0,21$ мм; $\Delta_2 = 2,5$ мм) и закрыт корочкой в 0,23 мм. На рис. 6, б корочка составляет 0,5 мм. Видим, что с увеличением толщины корочки над дефектом эффективность гидростатического давления резко падает: так, если образующая корочка над дефектом 0,23 мм, то дефект быстро закрывается уже при $P = 100$ атм, а если корочка в два раза толще, то дефект не закроется и при $P = 300$ атм.

Выводы:

1. Поставлена задача по определению НДС в кристаллизующейся корочке металла, имеющей дефекты в виде раковины (пустот) при наличии гидростатического поля.
2. С использованием апробированного численного метода разработаны численная схема и алгоритм решения задачи.
3. Разработанная методика продемонстрирована на решении задачи по заливке стали в металлическую форму.
4. Показано, что эффективность гидростатического поля резко падает, если его не применять непосредственно в период начала кристаллизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент № 2782365 Российская Федерация, МПК В22D 15/00 (2006.01), В22D 27/13 (2006.01). Способ изготовления полой литой металлической заготовки: № 2022117823; заявлено 29.06.2022; опубликовано 26.10.2022 / Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Одинокоев В. И. – Бюл. № 30.
2. Математическое моделирование процессов получения отливок в керамические оболочковые формы / В. И. Одинокоев, Э. А. Дмитриев, А. И. Евстигнеев, А. В. Свиридов. – М.: Инновационное машиностроение, 2020. – 256 с.
3. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В. И. Одинокоев, Б. Г. Каплунов, А. В. Песков, А. В. Баков. – М.: Наука, 2008. – 178 с.
4. Севастьянов, Г. М. Об одной начально-краевой задаче теплопроводности в системе с фазовыми переходами / Г. М. Севастьянов, А. М. Севастьянов, В. И. Одинокоев // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25. – № 3. – С. 119-133.

Тимофеев Г. А., Бердоносков В. Д.
G. A. Timofeev, V. D. Berdonosov

**ОПТИЧЕСКОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ СИМВОЛОВ В ИЗОЛИРОВАННОЙ ГИБРИДНОЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ: МЕТОДЫ АВТОМАТИЗАЦИИ СБОРА И ОБРАБОТКИ
ДАННЫХ**

**OPTICAL SIMPLE DISCOVERING IN AN ISOLATED HYBRID ENERGY SYSTEM:
METHODS OF AUTOMATIZATION OF DATA COLLECTION AND PROCESSING**

Тимофеев Георгий Андреевич – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре).

Georgy A. Timofeev – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur).

Бердоносков Виктор Дмитриевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре).

Victor D. Berdonosov – PhD in Engineering, Associate Professor, Applied Mathematics Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur).

Аннотация. В статье рассматриваются методы автоматизации сбора и обработки данных об облачности для изолированных гибридных энергетических систем (ИГЭС) в поселениях Крайнего Севера, в том числе с использованием оптического распознавания символов (OCR). Основное внимание уделено разработке программных решений для сбора данных из метеорологических сервисов, таких как OpenWeather API, «маска облачности» от ДВО РАН и сервис Ventusky. Проведённый сравнительный анализ данных показал, что данные, полученные с сервиса Ventusky, обладают наибольшей корреляцией с реальными данными с установки, что делает его наиболее подходящим для использования в ИГЭС. Были разработаны новые методы, обеспечивающие более точное получение данных светопропускаемости и мониторинга системы. Созданный дашборд на основе библиотеки Dash обеспечивает визуализацию и мониторинг данных в реальном времени, способствуя оперативному принятию решений и дальнейшим исследованиям.

Summary. The paper considers methods of automation of cloud data collection and processing for isolated hybrid energy systems (IHES) in the Far North settlements, including the use of optical character recognition (OCR). The main attention is paid to the development of software solutions for data collection from meteorological services, such as OpenWeather API, cloud mask from FEB RAS and Ventusky service. Comparative data analysis showed that the data obtained from the Ventusky service has the highest correlation with real data from the installation, which makes it the most suitable for use in the IHES. New methods were developed to provide more accurate light transmission and system monitoring data. A dashboard based on the Dash library was created to provide real-time data visualization and monitoring, facilitating rapid decision-making and further research.

Ключевые слова: автоматизация сбора данных, оптическое распознавание символов, ИГЭС, поселения Крайнего Севера, OpenWeather API, маска облачности ДВО РАН, Ventusky, дашборд, гибридные энергетические системы.

Key words: data collection automation, optical character recognition, IHES, Far North settlements, OpenWeather API, cloud mask FEB RAS, Ventusky, dashboard, hybrid energy systems.

УДК 004.942

Введение. Точность данных об облачности критична для управления изолированными гибридными энергетическими системами (ИГЭС) в поселениях Крайнего Севера. В процессе создания автономной системы, которая функционирует на альтернативных источниках энергии и использует цифровой двойник для точного прогнозирования выработки энергии, важны точные данные об облачности [1]. Получение достоверной информации об облачности играет важную роль в



этой системе, т. к. влияет на эффективность прогнозирования и распределение ресурсов. Основная цель проекта – разработать и интегрировать методы автоматизации сбора и анализа данных об облачности (извлечение текстовых данных из изображений при помощи OCR-технологии) из различных метеорологических сервисов, таких как OpenWeather API [4], «маска облачности» от ДВО РАН [5] и Ventusky [6]. Эти методы помогут улучшить прогнозы солнечной энергии и управление ресурсами ИГЭС. Актуальность прогнозирования солнечной энергии подтверждается исследованиями, показывающими, что точный анализ данных об облачности повышает эффективность производства солнечной энергии [2; 3]. В ходе данной работы был проведён анализ существующих методов сбора данных об облачности и разработаны новые методы, обеспечивающие более точное получение данных светопропускаемости и мониторинга системы.

Обзор технологий и инструментов для интеграции данных в системы мониторинга.

Получение точных данных облачности представляет собой сложную задачу. В этом исследовании рассмотрены три источника данных об облачности: OpenWeather API [4], «маска облачности» от ДВО РАН [5] и Ventusky [6]. OpenWeather предоставляет доступ к широкому спектру метеорологических данных, включая информацию об облачности, температуре, влажности и скорости ветра. OpenWeather использует данные о погоде, в том числе информацию об облачности, от множества источников. В [4] сказано, что они используют открытые данные, а также с помощью свёрточных нейросетей и машинного обучения расширяют возможности прогнозирования, используют радиолокационные прогнозы, данные со спутников и метеостанций. В рамках исследования был реализован программный код, который позволяет автоматизировать процесс получения, сохранения и анализа этих данных. Программа использует API OpenWeather для получения исторических данных о погоде.

Второй источник данных представляет собой «маску облачности», разработанную Александром Андреевым и его коллегами из Дальневосточного центра ФГБУ «Научно-исследовательский центр космической гидрометеорологии “Планета”» и Вычислительного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук. Исследование Андреева и Шамиловой посвящено методике детектирования облачности по данным геостационарного спутника Himawari-8 с применением нейронной сети свёрточного типа. Разработанная модель классификатора облачности была протестирована в различных сценариях, включая зимний и летний периоды года, в ночное и дневное время суток, а также в моменты смены дня и ночи. Результаты тестирования показали, что даже в сложных сценариях разработанный классификатор допускает минимальное количество ошибок по сравнению с применяемыми в мировой оперативной практике алгоритмами детектирования облачности. Обучение модели проводилось на данных с января 2016 года по июль 2019 года, включающих 302 мультиспектральных изображения территории Азиатско-Тихоокеанского региона [5]. После получения информации с источника была написана программа для разбора файлов формата «h5» и записи их в базу данных в «SQLite».

Третий источник данных для мониторинга облачности – приложение Ventusky [6], разработанное компанией InMeteo из Чехии совместно с Марекком Мойзиком и Мартином Прантлом. Ventusky представляет собой мощный инструмент для визуализации метеорологических показателей и изменения погодных условий в реальном времени по всему миру. Приложение предоставляет данные о ветре, давлении, осадках, облачности, температуре и грозах, отображая их на карте с использованием интуитивно понятных графических элементов. Основными поставщиками метеорологических данных для Ventusky являются Немецкая метеорологическая служба (DWD) и Национальное управление океанических и атмосферных исследований США (NOAA). Приложение собирает данные из различных источников, включая радары, спутники и наземные станции, чтобы предоставить точную и актуальную информацию о погоде. Получить данные с сервиса возможно при помощи технологии оптического распознавания символов (OCR) с использованием библиотеки «EasyOCR» [7] на Python. EasyOCR использует свёрточно-рекуррентную нейронную сеть CRNN для распознавания символов на изображениях. Алгоритм сначала сегментирует изображение, выделяя текстовые области, а затем классифицирует каждый символ в этих областях с помощью предварительно обученной модели. На основе данных со всех трёх источников был по-

строен объединённый график для сравнения информации об облачности и солнечной радиации (см. рис. 1).



Рис. 1. Сравнение облачного покрова и солнечной радиации с течением времени в декабре

Пунктирные линии разных цветов отображают данные об облачности: голубая линия – OpenWeather, серая линия – «маска облачности» ДВО РАН, оранжевая линия – Ventusky. Облачность измеряется в процентах, где 100 % означает полное облачное покрытие, а 0 – полное отсутствие облаков. Сплошная красная линия показывает данные о солнечной радиации, где высокие пики указывают на высокую интенсивность солнечной радиации, а низкие значения – на её отсутствие или низкую интенсивность. График показывает, что периоды высокой облачности соответствуют низким значениям солнечной радиации, что логично, т. к. облака препятствуют проникновению солнечных лучей. Периоды низкой облачности, напротив, характеризуются высокой солнечной радиацией. Как видно на графике, данные Ventusky имеют наибольшую корреляцию с реальными метеоусловиями.

Описание используемых методов и технологий для сбора и обработки данных. Процесс сбора данных начинается с формирования запросов к веб-приложению Ventusky при помощи базового URL с параметрами местоположения и времени. Для получения данных применяется автоматизация браузера с помощью библиотеки `ruautogui`. Программа открывает нужный URL, делает скриншоты области экрана с информацией об облачности и сохраняет текстовые данные, извлечённые из скриншота, в базу данных SQLite. Для распознавания текста из скриншотов используется библиотека `easyocr`.

Следующей задачей стала разработка интерфейса для визуализации и мониторинга данных. Необходимо было создать интерактивную панель управления (дашборд), которая позволит пользователям легко анализировать собранные данные об облачности и других погодных параметрах (см. рис. 2). Для создания дашборда была использована библиотека Dash, которая позволяет разрабатывать веб-приложения. Для программного решения получены соответствующие свидетельства о государственной регистрации [8–12]. В общем итоге полученный метод автоматизированного сбора метеорологических данных с использованием OCR (ACM-OCR) позволил получать актуальную информацию об облачности и сохранять её в удобном формате для последующего использования.

На изображении показан веб-интерфейс дашборда для визуализации данных по солнечной радиации и облачности, созданный с использованием библиотеки Dash. Он содержит интерактивные элементы управления для анализа и мониторинга метеорологических данных, такие как кнопки для загрузки баз данных и выпадающие списки для выбора графиков. Дашборд позволяет пользователям анализировать данные, скачивать базы данных и способствует более точному прогнозированию и управлению ресурсами ИГЭС.

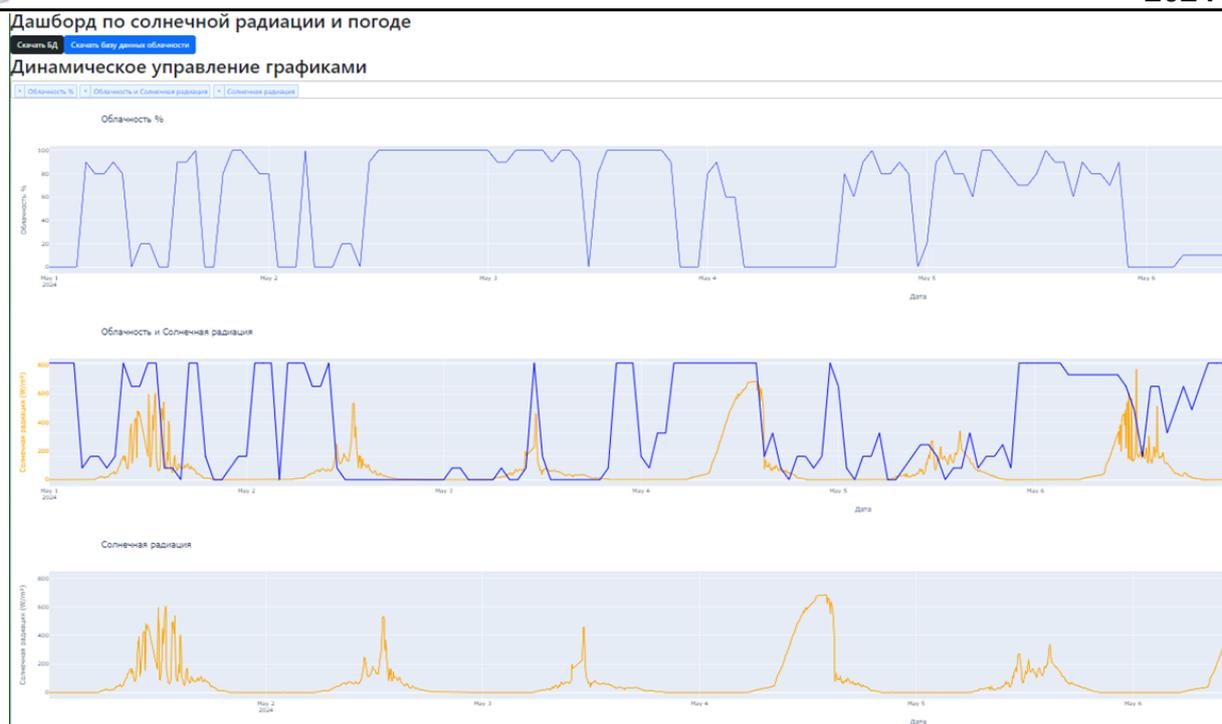


Рис. 2. Созданный интерфейс

Заключение. Сравнительный анализ показал, что данные Ventusky имеют наибольшую корреляцию с реальными метеорологическими условиями, что делает их наиболее подходящими для данного исследования. «Маска облачности» от ДВО РАН также продемонстрировала высокую точность, но имеет ограничения для мониторинга в реальном времени. Данные OpenWeather оказались менее точными для локальных условий. Разработанный метод ACM-OCR позволяет собирать, накапливать и визуализировать данные об облачности, обеспечивая удобство и гибкость в использовании. В итоге система мониторинга ИГЭС значительно улучшает точность и скорость обработки метеорологических данных, что важно для эффективного управления ресурсами в удалённых поселениях с суровыми климатическими условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев, Г. А. Поиск подходящей архитектуры для разработки цифрового двойника гибридных энергетических систем в изолированных от сетевых энергосистем средах с использованием ТРИЗ-эволюционного подхода / Г. А. Тимофеев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. – 2022. – Т. 20. – № 4. – С. 76-99.
2. Информационные службы облачности для управления солнечной энергией в Западной Африке / Д. К. Дансо, С. Анкетин, А. Дьедхиу, Р. Адаму // Atmosphere. – 2020. – Том 11. – № 8. – URL: https://www.researchgate.net/publication/343645191_Cloudiness_Information_Services_for_Solar_Energy_Management_in_West_Africa (дата обращения: 23.06.2024). – Текст: электронный.
3. Cloudy Days and Solar Arrays // NESDIS, NOAA. – 2020. – URL: <https://www.nesdis.noaa.gov/news/cloudy-days-and-solar-arrays> (дата обращения: 23.06.2024). – Текст: электронный.
4. OpenWeatherMap // OpenWeather. – URL: <https://openweathermap.org> (дата обращения: 23.06.2024). – Текст: электронный.
5. Андреев, А. И. Детектирование облачности по данным КА Himawari-8 с применением свёрточной нейронной сети / А. И. Андреев, Ю. А. Шамилова // Исследование Земли из космоса. – 2021. – № 2. – С. 42-52.
6. Ventusky – ветер, дождь и температурные карты // Ventusky. – URL: <https://www.ventusky.com> (дата обращения: 23.06.2024). – Текст: электронный.

7. EasyOCR // Jaided AI. – URL: <https://github.com/JaidedAI/EasyOCR> (дата обращения: 23.06.2024). – Текст: электронный.
8. Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2024620134 Российская Федерация. Солнечно-Метеорологическая База Данных: № 2024620001: заявлено 05.01.2024: опубликовано 11.01.2024 / Тимофеев Г. А.
9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024610649 Российская Федерация. Получение данных с почты ИГЭС: № 2024610015: заявлено 05.01.2024: опубликовано 12.01.2024 / Тимофеев Г. А.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024610745 Российская Федерация. Программное решение для мониторинга экологических параметров в реальном времени для работы ИГЭС: № 2024610115: заявлено 05.01.2024: опубликовано 12.01.2024 / Тимофеев Г. А.
11. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024610746 Российская Федерация. Программное получение показателей напряжения, тока, мощности со скриншотов для работы ИГЭС: № 2024610118: заявлено 05.01.2024: опубликовано 12.01.2024 / Тимофеев Г. А.
12. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024612662 Российская Федерация. Программное получение метеорологической информации: № 2024610046: заявлено 05.01.2024: опубликовано 02.02.2024 / Тимофеев Г. А.



Цициашвили Г. Ш., Гаврилов А. Н.
G. Sh. Tsitsiashvili, A. N. Gavrilov

ЗОНИРОВАНИЕ РАЙОНОВ РЕГИОНА ПО БЛИЗОСТИ К ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ

ZONING OF THE REGION DISTRICTS BY PROXIMITY TO THE EXTERNAL BORDER

Цициашвили Гурами Шалвович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (Россия, Владивосток); тел. 8(914)693-27-49. E-mail: guram@iam.dvo.ru.

Gurami Sh. Tsitsiashvili – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, the Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (Russia, Vladivostok); tel. 8(914)693-27-49. E-mail: guram@iam.dvo.ru.

Гаврилов Александр Николаевич – кандидат технических наук, заведующий лабораторией Морского государственного университета имени адм. Г. И. Невельского (Россия, Владивосток). E-mail: gavrilov@msun.ru.

Alexandr N. Gavrilov – PhD in Engineering, Head of the Laboratory, Maritime State University named after adm. G. I. Nevelsky (Russia, Vladivostok). E-mail: gavrilov@msun.ru.

Аннотация. Рассматривается карта некоторого региона с выделенными на ней районами. Проводится зонирование районов карты по минимальному числу границ между районами, которые нужно пересечь, чтобы выйти из данного района вовне региона. Такое зонирование даёт возможность уменьшения количества границ при построении маршрутов международных транспортных коридоров. Районы, попавшие в различные зоны, раскрашиваются разными цветами так, чтобы кратчайшие по числу пересекаемых границ пути из районов за пределы региона определялись переходом из района, раскрашенного одним цветом, в район, раскрашенный другим цветом. Это позволяет построить базу данных о кратчайших путях из районов за пределы региона. В основе построения такой базы данных лежит последовательность множеств районов и списков их соседей, удовлетворяющая некоторой рекуррентной последовательности. Для построения этой рекуррентной последовательности используются множества всех районов, множества граничных районов, множества внутренних районов и множества соседей каждого района. Эти множества определяются известными картографическими программами.

Summary. The map of a certain region with the districts highlighted on it is considered. The zoning of the map areas is carried out according to the minimum number of boundaries between the areas that need to be crossed in order to leave this area outside the region. Such zoning makes it possible to reduce the number of borders when building routes of international transport corridors. Areas that fall into different zones are painted in different colors so that the shortest paths from areas outside the region in terms of the number of borders crossed are determined by the transition from an area painted in one color to an area painted in another color. This allows you to build a database of shortest routes from areas outside the region. The basis for building such a database is a sequence of sets of districts that satisfies a certain recurrent sequence and is determined by the sets of neighbors of each individual district. To construct this recurrent sequence, sets of all districts, sets of boundary districts, sets of interior districts, and sets of neighbors of each district are used. These sets are determined by well-known cartographic programs.

Ключевые слова: планарный граф, зонирование районов, близость района к внешней границе, кратчайшие пути к внешней границе.

Key words: planar graph, zoning of districts, proximity of the district to the outer border, shortest paths to the outer border.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (номер 075-01290-23-00).

УДК 519.157

Введение. В современном мире необходимым условием успешного развития национальных экономик является эффективная работа транспортно-логистических систем [1; 2; 11]. На надгосударственном уровне важными инфраструктурными элементами, объединяющими транспортно-логистические системы различных стран, являются международные транспортные коридоры (МТК), представляющие собой совокупность маршрутов, проходящих по территориям государств и обеспечивающих перевозки пассажиров и грузов в международном сообщении на направлениях их наибольшей концентрации, а также совокупность технологических и организационно-правовых условий осуществления этих перевозок [3–5; 7; 9–10; 15–16].

Маршруты МТК могут пересекать несколько стран. Так, например, в работе МТК «Север – Юг» участвуют Россия, Индия, Иран, Оман, Азербайджан, Армения, Белоруссия, Казахстан, Сирия, Турция, Таджикистан, Киргизия [12, 17].

Одной из основных проблем функционирования МТК является прохождение грузами или пассажирами границы между сопредельными государствами. Как правило, на пересечение границы затрачивается значительное время. Это связано с необходимостью осуществления процедур пограничного, таможенного, санитарного и ветеринарного контроля, перегрузки на другие виды транспорта, смены колёсных пар вагонов из-за несовпадения ширины железнодорожной колеи в различных странах, с несовпадением режима работы соответствующих служб сопредельных государств и т. д. Кроме того, организация работы МТК требует заключения межправительственных соглашений, на подготовку которых могут уйти годы. Поэтому при выборе оптимального маршрута международной перевозки в рамках МТК одним из важнейших критериев оптимальности является минимум пересечений границ. Данная задача может быть сведена к задаче построения оптимального маршрута в планарном графе.

Рекуррентный алгоритм зонирования районов по карте региона. Рассматривается карта некоторого региона с выделенными на ней районами. Требуется провести зонирование районов региона по степени близости к внешней границе региона – минимальному числу межрайонных границ, которые следует пересечь, чтобы из него достичь внешней границы региона. Предполагается, что регион представлен на карте планарным графом, состоящим из многоугольников [6; 14].

Предположим, что имеется конечное множество $U_0 = \{u\}$ ограниченных многоугольников на плоскости. Предполагаем, что эти многоугольники могут между собой иметь/не иметь только общие границы или их части. Тогда границы этих многоугольников образуют планарный граф Γ , вершинами которого являются точки излома граничных ломаных, а рёбрами – прямолинейные куски ломаных.

В результате такого построения сами многоугольники становятся гранями планарного графа Γ [9]. Вследствие ограниченности многоугольников из множества U_0 внешняя грань графа Γ не входит в U_0 . Каждой грани $u \in U_0$ сопоставляется подмножество граней $S(u) \subseteq U_0$, соприкасающихся границами с гранью u . Назовём $S(u)$ множеством соседей грани u . Грань, соседствующую с внешней гранью, назовём граничной, а не соседствующую с внешней гранью – внутренней.

Обозначим $V_0 \subseteq U_0$ множество граничных граней и $U_1 = U_0 \setminus V_0$ – множество внутренних граней. Рекурсивно определим алгоритм последовательного зонирования граней:

$$U_{k+1} = \{u \in U_k : S(u) \subseteq U_k\}, \quad V_k = U_k \setminus U_{k+1}. \quad (1)$$

Данную рекурсию продолжаем до того шага n , когда впервые $U_{n+1} = \emptyset$. В результате получим соотношения $U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_n$ и определим множества граней $V_k = U_k \setminus U_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $V_n = U_n$, тогда $U_k = \bigcup_{j=k}^n V_j$, $k = 0, \dots, n$.

Замечание 1. Из формулы (1) следует, что для $\forall k \leq n$ справедливы соотношения

$$\forall u_k \in V_k \exists u_{k-1} \in S(u_k) \cap V_{k-1}; \forall j > 1 S(u_k) \cap V_{k-j} = \emptyset.$$

Доказательство данного утверждения проведём от противного. Для любой грани $u_k \in U_k, k > 0$, существует такое $\varepsilon > 0$, что ε окрестность грани u_k целиком содержится во множестве $u_k \cup S(u_k)$. Поскольку множество граней $U_k, k > 0$, является совокупностью ограниченных многоугольников, то можно определить максимальную точку x_k её проекции на ось абсцисс. Пусть эта максимальная точка принадлежит проекции на ось x грани $u_k \in U_k$. Но тогда грань u_k соседствует с гранями множества $S(u_k) \subseteq U_k$, и значит ε окрестность грани u_k содержится во множестве граней U_k . Последнее утверждение приводит к тому, что x_k не может быть максимальной точкой проекции множества граней U_k на ось абсцисс.

Следствие 1. Минимальное число границ, которые необходимо пересечь, чтобы из грани $u_k \in V_k$ провести кусочно-линейный непрерывный путь до какой-либо граничной грани, равно k .

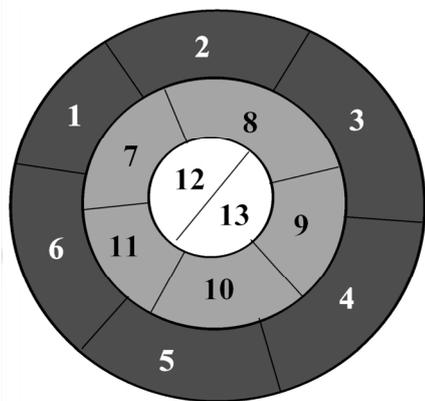


Рис. 1. Пример планарного графа Γ с выделенными на нём гранями

Замечание 2. Данный алгоритм обобщается на многомерный случай, когда плоские многоугольники заменяются на s -мерные многогранники.

На рис. 1 представлен идеализированный пример карты (планарного графа Γ), в которой множества V_0, V_1, V_2 удовлетворяют равенствам

$$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, V_1 = \{7, 8, 9, 10, 11\}, V_2 = \{12, 13\}.$$

В табл. 1 приведены списки меток у граней графа Γ . Первая метка у грани $u \in V_k$ характеризует минимальное число границ, которые нужно пересечь, чтобы выйти из грани u во внешнюю грань. Вторая метка характеризует соседние с u грани, содержащиеся в множестве V_{k-1} .

Таблица 1

Списки граней планарного графа Γ

| | | | | | | | | |
|--------|-------------|-----------------|------------|---------|---------|---------|---------|------------------|
| Грани | 12 | 13 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 |
| Списки | 3; 7, 8, 11 | 3; 8, 9, 10, 11 | 2; 1, 2, 6 | 2; 2, 3 | 2; 3, 4 | 2; 4, 5 | 2; 5, 6 | 1 |

Замечание 3. В планарном графе наличие нескольких вершин у второй метки списка является довольно распространённым явлением. Более того, в картографических приложениях нет необходимости выписывать вторые метки, достаточно указать множества V_0, \dots, V_n и закрасить эти множества граней каждую своим цветом.

Заключение. Алгоритм, представленный в данной статье, требует для своей реализации знания списков граней $S(u), u \in U$. Поэтому представленный алгоритм необходимо сочетать с известными алгоритмами, применяемыми в картографии (см., например, [13]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Азимов, П. Х. Основные подходы к формированию транспортно-логистических систем в международной теории и практике / П. Х. Азимов // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о человеке, обществе и культуре. – 2024. – № IV (76). – С. 81-87.

2. Габов, М. Ю. Эффективность развития транспортной системы региона / М. Ю. Габов, Т. А. Яковлева // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о человеке, обществе и культуре. – 2019. – № II-2 (38). – С. 118-122.
3. Карташова, О. И. Развитие региональной транспортной инфраструктуры во взаимодействии с международными транспортными коридорами / О. И. Карташова // Актуальные решения проблем водного транспорта: сборник материалов I Междунар. науч.-практ. конф., Астрахань, 28 апреля 2022 года. – Астрахань: ИП Сорокин Роман Васильевич, 2022. – С. 198-203.
4. Квитко, К. Б. Сравнительный анализ международных транспортных систем: инфраструктура, рейтинги, транспортные коридоры / К. Б. Квитко // Транспортные системы и технологии. – 2020. – Т. 6. – № 1. – С. 15-29.
5. Комов, М. С. Современные тенденции развития и значение международных транспортных коридоров на рынке транспортных услуг / М. С. Комов // Экономика и предпринимательство. – 2022. – № 6 (143). – С. 243-246.
6. Математическая энциклопедия. В 5 т. Т. 3 / гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская Энциклопедия, 1982. – 1182 с.
7. Овчинникова, С. В. Проблемы развития транспортной системы и международных транспортных коридоров в России / С. В. Овчинникова, Е. Е. Попова // Проблемы теории и практики управления. – 2023. – № 8. – С. 50-59.
8. Прасолов, В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2004. – 352 с.
9. Рахимов, А. Р. Международный транспортный коридор «Европа – Западный Китай» как основа развития транспортной системы страны / А. Р. Рахимов // Вестник экономики, права и социологии. – 2019. – Т. 2. – № 3. – С. 139-143.
10. Транспортная стратегия Российской Федерации до 2030 года с прогнозом на период до 2035 года: Распоряжение Правительства Российской Федерации от 27 ноября 2021 года № 3363-р // Официальное опубликование правовых актов. – URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202112030006> (дата обращения: 12.09.2024). – Текст: электронный.
11. Шевырин, Е. И. Интермодальные транспортно-логистические комплексы в России и за рубежом / Е. И. Шевырин // Экономика и управление. – 2011. – № 3 (65). – С. 50-54.
12. Belov Yurtaev, V. I. India, Russia and Iran: a New Study on «North – South» International Transport Corridor / V. I. Belov Yurtaev, Binish // Информация и инновации. – 2021. – Vol. 16. – No. 4. – P. 18-25.
13. Bocharnikov, V. N.; Fomenko, P. V.; Krasnopee S. M. Assessment of dynamics of Amur Tiger habitat quality influenced by natural and anthropogenic factors // Integrated Tools for Natural Resources Inventories in the 21-st Century. August 16-20, 1998. Boise, Idaho. 1998. P. 51-55.
14. Harary, F.; Norman, R. Z.; Cartwright, D. Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. Wiley: New York, 1965.
15. Konfino, K. V. Topical issues of development of international transport corridors and realization of transport potential of Russia / K. V. Konfino // Labour and Social Relations Journal. – 2019. – Vol. 30, No. 5. – P. 101-108.
16. Mirali, S. The Evolution of the importance of international transport corridors in modern world politics / S. Mirali // Вестник общественных и гуманитарных наук. – 2024. – Vol. 5. – No. 1. – P. 30-34.
17. Zakharov, A. The International North-South Transport Corridor: The Prospects and Challenges for Connectivity between Russia and India / A. Zakharov // MGIMO Review of International Relations. – 2023. – Vol. 16. – No. 2. – P. 216-234.



Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Пашковская О. В.
S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, O. V. Pashkovskaya

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

CONSERVATION LAWS IN THE MECHANICS OF A DEFORMABLE SOLID

Сенашов Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор Сибирского государственного университета науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (Россия, Красноярск); тел. +7(391)291-91-43. E-mail: sen@sibsau.ru.

Sergey I. Senashov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Siberian State University of Science and Technology (Russia, Krasnoyarsk); tel. +7(391)291-91-43. E-mail: sen@sibsau.ru.

Савостьянова Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент Сибирского государственного университета науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (Россия, Красноярск); тел. +7(391)291-91-43. E-mail: rупра@inbox.ru.

Irina L. Savostyanova – PhD in Pedagogy, Associate Professor, Siberian State University of Science and Technology (Russia, Krasnoyarsk); tel. +7(391)291-91-43. E-mail: rупра@inbox.ru.

Пашковская Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент Сибирского государственного университета науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (Россия, Красноярск); тел. +7(391)291-91-19. E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru.

Olga V. Pashkovskaya – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Siberian State University of Science and Technology (Russia, Krasnoyarsk); tel. +7(391)291-91-19. E-mail: pashkovskaya@sibsau.ru.

Аннотация. В статье рассказывается о методах построения законов сохранения для уравнений механики деформируемого твёрдого тела. Показано применение законов сохранения для решения краевых задач уравнений теории двумерной идеальной пластичности, первой краевой задачи теории упругости в двумерном и трёхмерном случаях. Законы сохранения позволили найти упругопластическую границу в задаче о напряжённом состоянии композитного бруса.

Summary. The authors write about methods for constructing conservation laws for equations of deformable solid mechanics in this article. The authors write about the application of conservation laws to solve boundary value problems of equations of the theory of two-dimensional ideal plasticity, the first boundary value problem of elasticity theory in two-dimensional and three-dimensional cases. Conservation laws made it possible to find an elastic-plastic boundary in the problem of the stress state of a composite beam.

Ключевые слова: законы сохранения уравнений механики, краевые задачи, пластичность, упругость, композитные материалы.

Key words: laws of conservation of equations of mechanics, boundary value problems, plasticity, elasticity, composite materials.

УДК 539.374

Введение

Определение 1. Законом сохранения называют соотношение вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

сохраняющимся током назовём вектор $S = (S_1, \dots, S_n)$, удовлетворяющий условию (1).

Это определение далее будет уточнено.

Э. Нетер в 1918 г. установила связь между инфинитезимальными симметриями функционала

$$\int L(x, u, u'_j) dx$$

и законами сохранения системы уравнений Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial u_k} - \frac{d}{dx_i} \frac{\partial L}{\partial u_{k,i}} = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – независимые переменные; $u = (u_1, \dots, u_m)$ – зависимые функции, определённые в некоторой области $\Omega \subset R^n$, $u'_j = \frac{\partial}{\partial x_j} u$ – их частные производные [6].

Позднее важные результаты в этом направлении были получены Ф. Клейном и К. Якоби. В 70-е годы прошлого столетия было получено много обобщений теоремы Нетер на другие виды симметрий.

Заметим, что законы сохранения, без этого термина, использовались ранее в работах Римана и Вольтерра. Они применяли известное тождество

$$vLu - uL^*v = \text{div } S, \quad Lu = 0, \quad L^*v = 0, \quad (2)$$

где L – линейный оператор; L^* – оператор, формально сопряжённый к L .

Риман, а позднее Вольтерра с помощью тождества (2) решали краевые задачи для гиперболических уравнений [13]. Актуальность краевых задач и разнообразные подходы к их решению отмечены в работах [1–3; 7; 9].

Подход к построению законов сохранения, обобщающий результаты Нетер на произвольные системы дифференциальных уравнений, появился в работах [4; 18]. Авторами этих работ был введён оператор универсальной линеаризации, который для системы дифференциальных уравнений

$$F = 0 \quad (3)$$

имеет вид

$$l_F = \begin{pmatrix} \sum_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial p_{\sigma}^1} D_{\sigma} & \dots & \sum_{\sigma} \frac{\partial F_1}{\partial p_{\sigma}^m} D_{\sigma} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\sigma} \frac{\partial F_r}{\partial p_{\sigma}^1} D_{\sigma} & \dots & \sum_{\sigma} \frac{\partial F_r}{\partial p_{\sigma}^m} D_{\sigma} \end{pmatrix},$$

где $F = (F_1, \dots, F_r)$, $F_i = F_i(x, u, \dots, u_{(s)})$ и $u_{(s)}$ есть общая частная производная порядка s функций u_i относительно переменных x_j ,

$$p_{\sigma}^i = \frac{\partial^{|\sigma|} u_i}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \quad |\sigma| = i_1 + \dots + i_n, \quad \sigma = (i_1, \dots, i_n).$$

Обобщённый дифференциальный оператор по x_j есть

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\sigma, i} P_{\sigma j}^i \frac{\partial}{\partial p_{\sigma}^i}, \quad \text{где } \sigma j = (i_1, \dots, i_j + 1, \dots, i_n).$$

Пусть $D_{\sigma} = D_1^{i_1} \circ \dots \circ D_n^{i_n}$, где σ определено выше. Тогда

$$\psi l_F \phi - \phi l_F^* \psi = \text{div } S, \quad l_F \phi = \Pi_1(F) = 0, \quad l_F^* \psi = \Pi_2(F) = 0, \quad (4)$$

где Π_1, Π_2 – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не тождественно равные нулю. Здесь и далее под системой (3) понимаются также и все её дифференциальные следствия вида $D_{\sigma}(F_i) = 0 \quad \forall \sigma, i$. Функции ϕ, ψ называются производящими функциями симметрий и законов сохранения соответственно.

Из (4) получаем следующее более точное определение закона сохранения.

Определение 2. Законом сохранения называют соотношение вида

$$\operatorname{div} S = \Pi(F), \tag{5}$$

где Π – некоторый линейный дифференциальный оператор, тождественно не равный нулю.

Равенство (5) позволяет искать законы сохранения более простым способом, чем через поиск производящей функции ψ закона сохранения, и именно в том виде, который более устраивает исследователя. С помощью формулы (5) были найдены законы сохранения, которые удалось использовать для решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ). В этом и состоит скромный вклад авторов в данную тематику.

Законы сохранения и их использование для решения гиперболических систем уравнений МДТТ

Вычислим законы сохранения для уравнений идеальной пластичности и используем их для решения задачи Коши [10].

В определениях первой части имеем

$$F_1 = u_1^1 + u_1^2 \cos 2u^2 + u_2^2 \sin 2u^2 = 0, \quad F_2 = u_2^1 + u_1^2 \sin 2u^2 - u_2^2 \cos 2u^2 = 0,$$

$$u^1 = p, \quad u^2 = \theta.$$

Это система гиперболического типа.

Задача Коши для неё имеет вид

$$u^1|_L = f^1(x_1, x_2), \quad u^2|_L = f^2(x_1, x_2).$$

Из

$$\tilde{I}_F^* \begin{pmatrix} \tilde{w}^1 \\ \tilde{w}^2 \end{pmatrix} = 0$$

получим

$$\partial_1 w^1 + \partial_2 w^1 = A(F). \tag{6}$$

Система (6) линейна, поэтому она имеет бесконечную серию законов сохранения.

Имеем (см. рис.1):

$$\iint_S \operatorname{div} w dx dy = \int_{PS} -w^1 dy + w^2 dx + \int_{SR} -w^1 dy + w^2 dx + \int_{RP} -w^1 dy + w^2 dx = 0. \tag{7}$$

Находим такие решения системы (6), чтобы $\int_{SR} = \int_{RP} = 0$.

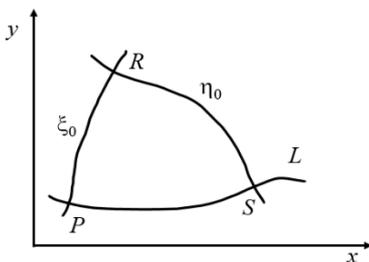


Рис. 1. Задача Коши

Тогда из (7) можно, интегрируя по частям, найти координаты точки пересечения R . Это позволяет построить характеристики системы уравнений пластичности и тем самым решить задачу Коши.

Использование законов сохранения для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа, описывающих изгиб композитного бруса

Постановка задачи. Рассмотрим брус, изготовленный из упругопластического материала, армированный n упругими волокнами (см. рис. 2). Один конец бруса закреплён в точке $z = 0$, на втором конце бруса при $z = l$ подвешен груз весом P в начале координат, которое совпадает с центром тяжести сечения. Матрица бруса имеет модуль упругости G и предел текучести при чистом сдвиге k_s . Волокна расположены вдоль оси бруса в произ-

вольном порядке параллельно оси z . Каждое волокно имеет круглое сечение, центр волокна располагается в точке с координатами (x_i, y_i) , радиус волокна равен R , модуль упругости G_i . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы. Касательное напряжение между волокном и матрицей равно $\tau < k_s$ [8].

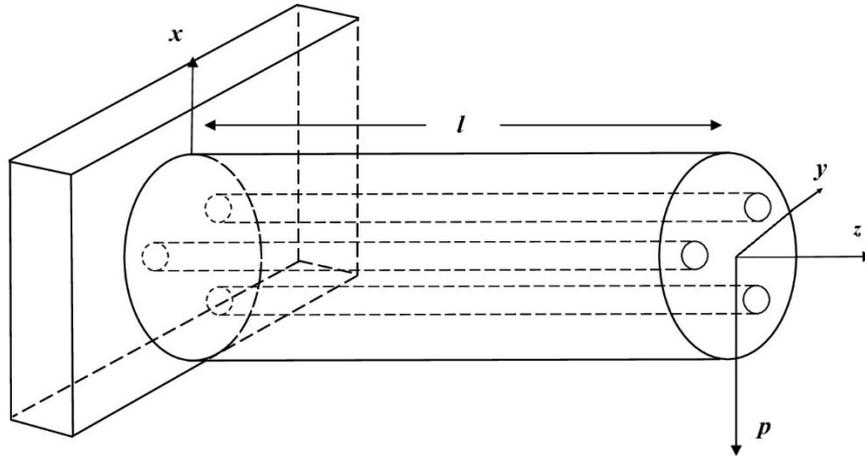


Рис. 2. Брус с упругими волокнами

Заданный процесс описывается уравнением равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{Px}{I}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{P}{(1+\nu)I}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_z = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad I = \int_S x^2 ds.$$

Из двух последних уравнений (8) с учётом первого получаем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -\frac{P(2+\nu)}{I(1+\nu)}y - 2K, \quad (9)$$

где K – постоянная, являющаяся углом поворота объёмного элемента бруса относительно оси z ; $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ – компоненты тензора напряжений; S – поперечное сечение бруса; I – момент инерции относительно оси y .

Граничные условия на боковой поверхности бруса, свободной от напряжений и находящейся в пластическом состоянии, имеют вид

$$\tau_{xz}n_0 + \tau_{yz}m_0 = 0, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 = k_s^2 - 1/3\sigma_z^2,$$

где n_0, m_0 – компоненты вектора нормали к боковой поверхности, которые можно записать в виде

$$\tau_{xz} = \mp mk, \quad \tau_{yz} = \pm nk. \quad (10)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия

$$\tau_{xz}m_i - \tau_{yz}n_i = \tau, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где n_i, m_i – компоненты вектора нормали к боковой поверхности i -го волокна, которые запишем в виде

$$\tau_{xz} = m\tau \pm n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad \tau_{yz} = n\tau \pm m\sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (11)$$

Далее в формулах (9) – (10) выбирается верхний знак.

Законы сохранения уравнений (8) – (9). Для удобства дальнейших вычислений введём следующие обозначения:

$$\tau_{xz} = u, \tau_{yz} = v.$$

Тогда задача (7) – (11) запишется так:

$$F_1 = u_x - v_y - Px / I = 0, \quad (12)$$

$$F_2 = u_y - v_x + \frac{P(2+v)}{(1+v)}y + 2K = 0,$$

на боковой поверхности

$$u = -mk, v = nk,$$

на границе волокна и матрицы

$$u = m\tau + n\sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad v = n\tau + m\sqrt{k^2 - \tau^2}.$$

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (12) назовём выражение вида

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (13)$$

где ω_1, ω_2 – некоторые линейные операторы, одновременно не равные тождественно нулю.

Более подробно технику вычисления законов сохранения и их использования можно найти в [5; 11; 12; 14–17].

Пусть

$$A = \alpha^1 u + \beta^1 v + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 u + \beta^2 v + \gamma^2, \quad (14)$$

где $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ – функции только от x, y . Подставляя (14) в (13), получаем

$$\alpha_x^1 + \alpha_y^2 = 0, \beta_x^1 + \beta_y^2 = 0, \alpha^1 = \omega_1, \beta^1 = -\omega_2, \alpha^2 = \omega_2, \beta^2 = \omega_1, \\ \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 Px / I + \beta^1 [2K + P(2+v)y / (I(1+v))].$$

Отсюда следует

$$\alpha_x^1 - \beta_y^1 = 0, \beta_x^1 + \alpha_y^1 = 0, \gamma_x^1 + \gamma_y^2 = -\alpha^1 Px / I + \beta^1 [2K + P(2+v)y / (I(1+v))]. \quad (15)$$

Рассмотрим для системы уравнений (15) два решения, имеющие особенности в произвольной точке (x_0, y_0) сечения:

$$1. \alpha^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 = 0, \gamma^2 = -\frac{Px}{I} \arctg\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) - \frac{P(2+v)}{I(1+v)} \left[y - y_0 + \left(\frac{y_0}{x - x_0} + x - x_0\right) \arctg\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) \right] - K \ln\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right), \quad (16)$$

$$2. \alpha_*^1 = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$\gamma_*^1 = 0, \quad \gamma_*^2 = 2K \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) + \frac{P(2 + \nu)}{I(1 + \nu)} \left[y_0 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) + \frac{x - x_0}{2} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] - \quad (17)$$

$$- \frac{Px^2}{2l} \ln \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right),$$

где x_0, y_0 – постоянные.

Вычисление напряжённого состояния в точке (x_0, y_0)

Пусть $(x_0; y_0)$ – произвольная точка, принадлежащая связующему, и пусть в этой точке сохраняющийся ток имеет особенность вида (16) или (17). Тогда из (13) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_0} A dy - B dx - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (18)$$

где ε – окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ (см. рис. 3).

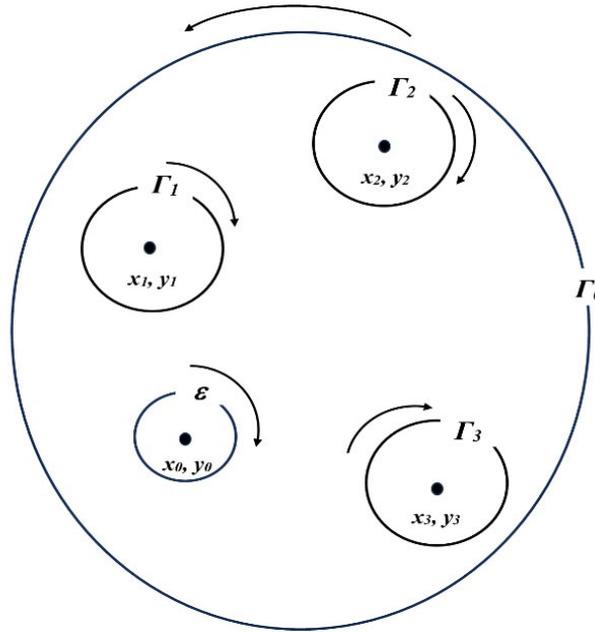


Рис. 3. Область интегрирования

Рассмотрим решение (8), полагая $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi, y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$, тогда из (18) с учётом (16) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = & \oint_{r_0} \left(m_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - n_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
 & - \left(m_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx + \\
 & + \sum_{i=1}^n \oint_{r_i} \left(\frac{(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
 & - \left((m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + (n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma^2 \right) dx.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим другое решение уравнений (15) вида (16).

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (18), получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi\tau_{23}(x_0, y_0) = & \oint_{r_0} \left(m_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
 & - \left(m_0 k \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + n_0 k \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma_*^2 \right) dx + \\
 & + \sum_{i=1}^n \oint_{r_i} \left(\frac{(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) dy - \\
 & - \left(-(m_i \tau + n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + (n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \gamma_*^2 \right) dx.
 \end{aligned}$$

Заключение

Полученные формулы позволяют вычислить напряжённое состояние в любой точке связующего материала. Те точки, где $\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2$, будут находиться в пластическом состоянии, остальные точки среды, а также волокна будут оставаться упругими.

Предложенный метод решения позволяет построить упругопластическую границу в изгибаемом композитном брусе и тем самым оценить его несущую способность. Многообразие композитов и их огромная практическая важность позволяют надеяться, что предложенная авторами методика позволит оценивать прочность конструкций, изготовленных из композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин, Б. Д. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением / Б. Д. Аннин, Н. И. Остросаблин, Р. И. Угрюмов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2023. – Т. 26. – № 1. – С. 5-19.
2. Буренин, А. А. К построению теории термоупругости при конечной скорости распространения тепла / А. А. Буренин // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № IV-1 (36). – С. 47-53.
3. Буренин, А. А. Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки / А. А. Буренин, В. П. Матвеев, А. В. Ткачева // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2018. – № III-1 (35). – С. 31-41.
4. Виноградов, А. М. Симметрии и законы сохранения / А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин. – М.: Фактор, 1996. – 461 с.
5. Киряков, П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно. – Новосибирск: СО РАН, 2001. – 120 с.

6. Нетер, Э. Инвариантные вариационные задачи / Э. Нетер // Вариационные принципы механики. – М.: Физматлит, 1959. – С. 611-630.
7. Петраков, И. Е. Анализ изгиба композитных пластин с учётом различия сопротивлений растяжению и сжатию / И. Е. Петраков, В. М. Садовский, О. В. Садовская // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – № 1. – С. 172-183.
8. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 743 с.
9. Разработка новых структур многослойных оболочковых форм по выплавляемым моделям / А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев, В. И. Одинокоев [и др.] // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № VII (47). – С. 104-107.
10. Сенашов, С. И. Законы сохранения и точное решение задачи Коши для уравнений идеальной пластичности / С. И. Сенашов // Доклады РАН. – 1995. – Т. 345. – № 5. – С. 619-620.
11. Сенашов, С. И. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трёхмерных уравнений теории упругости / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2024. – Т. 27. – № 1. – С. 100-111.
12. Сенашов, С. И. Напряжённое состояние композитной консоли / С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т. 16. – № 1. – С. 56-61.
13. Смирнов, В. И. Высшая математика. В 5 т. Т. 4 / В. И. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1974. – 336 с.
14. Gomonova, O. V., Senashov, S. I. Determining elastic and plastic deformation regions in a problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 62:1 (2021). – P. 157-163.
15. Senashov, S. I., Savostyanova, I. L., Cherepanova, O. N. Elastoplastic bending of the console with transverse force // J. of the Siberian Federal University. Math. and Phys., 12:5 (2019). – P. 637-643.
16. Senashov, S. I., Savostyanova, I. L. Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisila-Teodorescu system // J. Appl. Industr. Math., 25:2 (2022). – P. 101-109.
17. Senashov, S. I., Vinogradov, A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. (1988) 31. – P. 415-439.
18. Vinogradov, A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 2 (1984). – P. 21-78.



Иванов Д. Х.
D. Kh. Ivanov

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО МНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

NUMERICAL IDENTIFICATION OF A NONSTATIONARY MULTIPLIER IN THE RIGHT-HAND SIDE OF ANOMALOUS DIFFUSION EQUATION

Иванов Дьулус Харлампович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Дальневосточного центра математических исследований Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова (Россия, Якутск); ул. Кулаковского, 48, Якутск, Россия. E-mail: djulus.ivanov@yandex.ru.

Dulus Kh. Ivanov – PhD in Physics and Mathematics, Research Assistant, Yakutsk Branch of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center «Far Eastern Center for Mathematical Research», North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov (Russia, Yakutsk); Kulakovskogo Str., 48, Yakutsk, Russia. E-mail: djulus.ivanov@yandex.ru.

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для уравнения аномальной диффузии в ограниченной области. Вместо частной производной по времени берётся производная дробного порядка α ($0 < \alpha < 1$) в смысле Герасимова – Капуто. Для аппроксимации дробной производной используется классическая линеаризация. Аппроксимация по времени выполнена с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для аппроксимации по пространству используем метод конечных элементов. Для восстановления зависящей от времени множителя правой части строится вычислительный алгоритм на основе специальной декомпозиции дискретного аналога задачи с решением двух сеточных эллиптических задач. Неизвестный множитель итерационно вычисляется на каждом временном слое по данным наблюдения. На модельных задачах представлены возможности предложенного вычислительного алгоритма.

Summary. In this article we consider initial-boundary value problem for anomalous diffusion equation in a finite region. In contrast to partial time derivative, the Gerasimov-Caputo fractional derivative of order α ($0 < \alpha < 1$) is taken. To approximate the fractional derivative, traditional linearization is used. Approximation on time is performed by using implicit finite-difference scheme. We use finite element method to approximate on space variables. We construct a computational algorithm to restore a time-dependent factor of the right-hand side occurring in anomalous diffusion equation. The algorithm is based on a special decomposition of a discrete analogue of the problem into solution of two grid elliptic problems. The unknown factor is determined for every time iteration from observations of the solution. Capabilities of the proposed algorithm are presented on several model problems.

Ключевые слова: обратная задача, аномальная диффузия, дробная производная, метод конечных разностей, метод конечных элементов.

Key words: inverse problem, anomalous diffusion, fractional derivative, finite difference method, finite element method.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1441.

УДК 519.642.2

Введение. Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка возникают во многих прикладных задачах физики, биологии, экономики [3; 5; 8; 9]. Аномальная диффузия возникает, например, при описании движения частиц в среде, имеющей сильно фрактальную структуру, взамен классического броуновского движения, или при описании фильтрации

жидкости в пористой среде [5]; рекомендуется посмотреть работу [11] и библиографический список в ней.

Аномальная диффузия делится на два класса в зависимости от порядка дробной производной. Субдиффузия соответствует случаю, когда берётся дробная производная по времени порядка $\alpha \in (0,1)$. Супердиффузия соответствует случаю, когда берётся дробная производная по времени порядка $\alpha \in (1,2)$, также известна как волновое уравнение дробного порядка [6].

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных хорошо изучена [4; 10]. При рассмотрении нестационарных задач отдельно выделяются задачи по восстановлению коэффициентов, зависящих по времени или по пространственным переменным. В последнее время возникает большой интерес к решению обратных задач восстановления коэффициентов уравнения аномальной диффузии, граничных или начальных условий, а также дробного порядка по дополнительным информациям [7; 12].

В работе [1] представлен метод восстановления нестационарного младшего коэффициента параболического уравнения на основе декомпозиции задачи с решением двух сеточных эллиптических задач. Такой подход был применён для идентификации правой части, зависящей от времени, для параболического уравнения [2].

В данной работе рассматривается решение обратной задачи по восстановлению нестационарного множителя в правой части уравнения субдиффузии.

Постановка задачи. Пусть функция $u(x, t)$, $x \in \Omega \subset R^n$, $0 < t \leq T$, $T > 0$, удовлетворяет нелокальному уравнению аномальной диффузии с дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \nabla \cdot (k(x, t) \nabla u) + p(t) f(x, t), x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где коэффициент диффузии $k(x, t) \geq \kappa > 0$, функция источника в правой части представляет собой произведение функции $p(t)$, зависящей только от времени, и пространственно-временной функции $f(x, t)$.

Полная граница области $\partial\Omega$ разделена на части Γ_D и Γ_R , $\Gamma_D \cup \Gamma_R = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_R = \emptyset$. На Γ_D задаётся граничное условие первого рода (Дирихле):

$$u(x, t) = \mu_D(x, t), x \in \Gamma_D, 0 < t \leq T,$$

на Γ_R – граничное условие третьего рода (Робин):

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} = \beta(u - \mu_R(x, t)), x \in \Gamma_R, 0 < t \leq T,$$

где n – вектор внешней нормали к границе. Уравнение (1) дополняется начальным условием:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega.$$

Коэффициент $\beta > 0$ и функции $\mu_D(x, t)$, $\mu_R(x, t)$ и $u_0(x)$ считаются известными.

Дробная производная по времени порядка α , $0 < \alpha < 1$, рассматривается в смысле Герасимова – Капуто [3]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds,$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds$ – гамма-функция Эйлера.

Рассмотрим обратную задачу, где в уравнении (1) функция $p(t)$ подлежит идентификации. Дополнительная информация рассматриваемой обратной начально-краевой задачи обычно задаётся в некоторой внутренней точке $x_o \in \Omega$: $u(x_o, t) = \phi(t)$, $0 < t \leq T$. В более общем случае рассматривается нелокальное наблюдение $\int_\Omega \xi(x) u(x, t) dx = \phi(t)$, $0 < t \leq T$. Среди них также выделим средневзвешенное решение на границе Γ_R : $\frac{1}{l(\Gamma_R)} \int_{\Gamma_R} u(x, t) dx = \phi(t)$, $0 < t \leq T$, где $l(\Gamma_R)$ – длина границы.

Вычислительный алгоритм. Разобьём интервал $[0, T]$ на N одинаковых отрезков: $\omega_\tau = \{t_j: t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N; \tau = T/N\}$. Построим триангуляцию ω_h в области Ω , где h – характеристическая длина сетки, минимальный из диаметров n -мерных сфер, вписанных в ячейки триангуляции.

Для вычисления дробной производной Герасимова – Капуто используем стандартную аппроксимацию [13]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x, t_j) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^j \frac{u(x, t_{j-k+1}) - u(x, t_{j-k})}{\tau} \frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} (k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}).$$

Упрощая выражение, получаем, что для вычисления дробной производной необходимо просуммировать состояния за предыдущие шаги с убывающими по абсолютной величине весами:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x, t_j) \approx g_\alpha \sum_{k=0}^j c_k u(x, t_{j-k}),$$

где введено обозначение $g_\alpha = 1/(\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha)$, а веса находятся по следующим формулам:

$$v_1 = 1, v_k = k^{1-\alpha} - (k-1)^\alpha, k = 2, 3, \dots, N,$$

$$c_0 = v_1, c_k = v_{k+1} - v_k, k = 1, 3, \dots, j-1, c_j = -v_j.$$

Нетрудно заметить, что все веса c_k , кроме c_0 , будут отрицательными.

Введём конечномерное гильбертово пространство $V^h \subset L_2(\Omega)$ с введёнными стандартными скалярным произведением и нормой: $(u, v) = \int_\Omega u v dx$, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Пространство $V_0^h \subset V^h$ является подпространством функций, обращающихся в нуль на границе Γ_D : $V_0^h = \{u \in V^h: u(x) = 0, x \in \Gamma_D\}$. Дополнительно введём обозначение для скалярного произведения по границе S : $(u, v)_S = \int_S u v ds$.

При численном решении рассматриваемой начально-краевой задачи для нелокального уравнения аномальной диффузии используем неявную разностную схему по времени. Для дискретных аналогов функций и коэффициентов введём следующие обозначения: $u^j = u(x, t_j)$, $p^j = p(t_j)$, $f^j = f(x, t_j)$, $k^j = k(x, t_j)$, $\mu_D^j = \mu_D(x, t_j)$, $\mu_R^j = \mu_R(x, t_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$.

Вариационная формулировка запишется следующим образом: найти функции $u^j \in V^h$, $j = 1, 2, \dots, N$ таких, что $\forall v \in V_0^h$:

$$g_\alpha(u^j, v) + (k^j \nabla u^j, \nabla v) + \beta(u, v)_{\Gamma_R} = -g_\alpha \sum_{k=0}^{j-1} c_{j-k} (u^k, v) + \beta(\mu_R, v)_{\Gamma_R}.$$

Начальное условие $(u^0, v) = (u_0, v)$, $\forall v \in V_0^h$, граничное условие $u^j(x) = \mu_D^j(x)$, $x \in \partial\omega_h^D$, где $\partial\omega_h^D$ – множество граничных узлов сетки, соответствующих границе Γ_D . При использовании конечных элементов более высокого порядка граничное условие первого рода ставится для всех степеней свободы, лежащих на границе. Заметим, что в правую часть входят состояния решения за все предыдущие временные слои.

Вычислительный алгоритм определения неизвестной функции $p(t)$ базируется на специальной декомпозиции решения на новом временном слое: $u^j(x) = v^j(x) + p^j w^j(x)$.

На каждом временном слое $j = 1, 2, \dots, N$ вспомогательные функции $v^j(x)$ и $w^j(x)$ находятся из решения эллиптических задач со следующими вариационными формулировками: найти функцию $v^j \in V^h$ такую, что

$$g_\alpha(v^j, v) + (k^j \nabla v^j, \nabla v) + \beta,$$

$$v^j(x) = \mu_D^j(x), x \in \partial\omega_h^D,$$

найти функцию $w^j \in V^h$ такую, что

$$g_\alpha(w^j, v) + (k^j \nabla w^j, \nabla v) + \beta,$$

$$w^j(x) = 0, x \in \partial\omega_h^D.$$

При введённой декомпозиции искомая задача выполняется для любого значения p . Уточнение происходит из дополнительной информации так, что

$$p^j = \frac{\varphi^j - v^j(x_0)}{w^j(x_0)},$$

при условии $w^j(x_0) \neq 0$, где $\varphi^j = \Phi(t_j)$ – дискретный аналог данных локального наблюдения. Аналогичная формула получится, если у нас нелокальное наблюдение:

$$p^j = \frac{\varphi^j - \int_{\Omega} \xi(x) v^j(x) dx}{\int_{\Omega} \xi(x) w^j(x) dx}.$$

В этом случае необходимо потребовать, чтобы $\int_{\Omega} \xi(x) w^j(x) dx \neq 0$. После этого находится само решение на текущем временном слое u^j по формуле декомпозиции.

Для выполнения условия на знаменатель вышеупомянутой формулы потребуем, чтобы функция в правой части $f(x, t)$ была знакопостоянной, например $f(x, t) \geq 0$.

Численные результаты. Расчётная область и сетка отображены на рис. 1, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Будем использовать конечные элементы первого порядка, при этом функция приближается кусочно-линейными базисными функциями, определёнными на ячейках триангуляции ω_h .

Рассматривается следующая задача: $T = 0,1$, дробный порядок равен $\alpha = 0,5$,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \Delta u = p(t)f(x, t), x \in \Omega, 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = 1, x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 1, x \in \Gamma_D, 0 < t \leq T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 2, x \in \Gamma_R, 0 < t \leq T,$$

где Γ_D – внешняя граница, Γ_R – внутренняя (см. рис. 1).

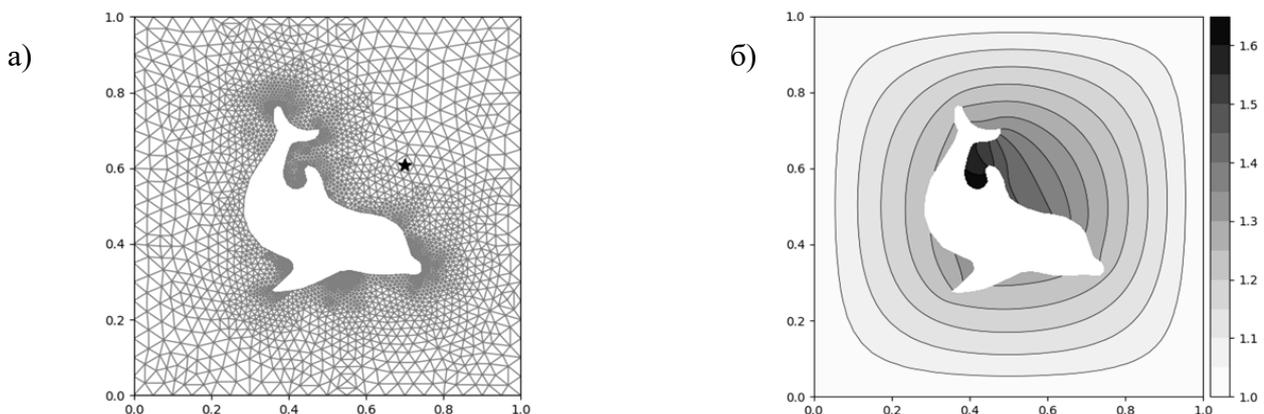


Рис. 1. Расчётная область, сетка и точка наблюдения (а) и решение в финальный момент времени (б)

В правой части $f(x, t) = 1 + x_1 x_2$, а точное значение функции $p(t)$ задаётся так:

$$p(t) = \frac{1000t}{1 + \exp(\gamma(t - T/2))}$$

При увеличении параметра γ функция $p(t)$ приближается к разрывной функции в точке $T/2$.

Рассматривается два случая ведения дополнительной информации $\phi(t)$: 1) решение в точке x_0 , на рис. 1, *a* обозначено чёрной звездой; 2) среднее значение решения по границе Γ_R . Данные наблюдения находятся путём решения прямой задачи с более мелким временным шагом $\tau = T/N$, $N = 200$ при заданных коэффициентах и функциях. Решение при $\gamma = 100$ в финальный момент времени T изображено на рис. 1, *б*.

График функции $p(t)$ при различных параметрах γ представлен на рис. 2, *a*. Заметим, что при заданных стационарных функциях $k(x)$ и $f(x)$ вспомогательная задача для $w(x)$ решается только один раз (см. рис. 2, *б*). Видно, что внутри квадрата функция w принимает положительные значения и обращение в ноль знаменателя при восстановлении функции p не происходит.

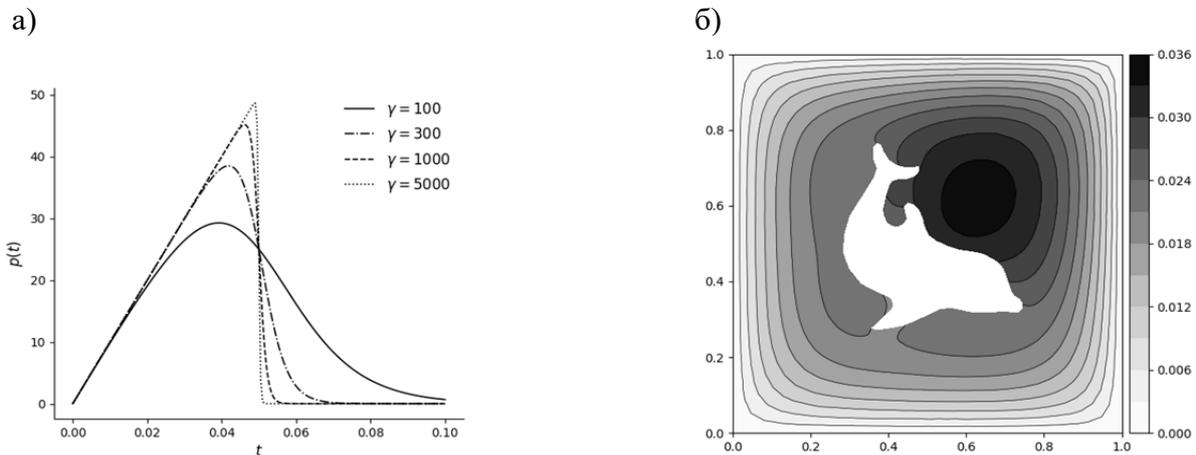


Рис. 2. Точная функция $p(t)$ (а) и пример вспомогательной функции $w(x)$ при $\gamma = 100$ и $N = 50$ (б)

Исследуется решение обратной задачи при различных шагах по времени: $N = 25, 50, 100$. Ошибки восстановления нестационарной функции $p(t)$, $\varepsilon(t) = \hat{p}(t) - p(t)$, где $\hat{p}(t)$ – найденная по алгоритму приближённая функция, представлены на рис. 3. Алгоритм достаточно хорошо справляется как для локального наблюдения, так и для нелокального. При $\gamma = 100$, когда восстанавливается плавно меняющаяся функция p , в обоих наблюдениях видно, что большая ошибка аппроксимации наблюдается в начале времени. Возможно, это связано тем, что в начальный момент времени нет памяти о том, что система покоилась. Для более резко меняющейся функции ($\gamma = 1000$) большие ошибки заключены в области разрыва (см. рис. 4).

На практике данные наблюдения имеют некоторый шум, для моделирования такого случая добавим синтетический шум следующим образом:

$$\phi_\delta(t) = \phi(t) + \delta \max_{s \in [0, T]} |\phi(s)| : (2\sigma(t) - 1),$$

где случайное число $\sigma(t)$ берётся из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$; δ – уровень шума. Полученные результаты восстановления неизвестной функции при уровне шума 5 % для локального и нелокального наблюдений показаны на рис. 5, $N = 50$.

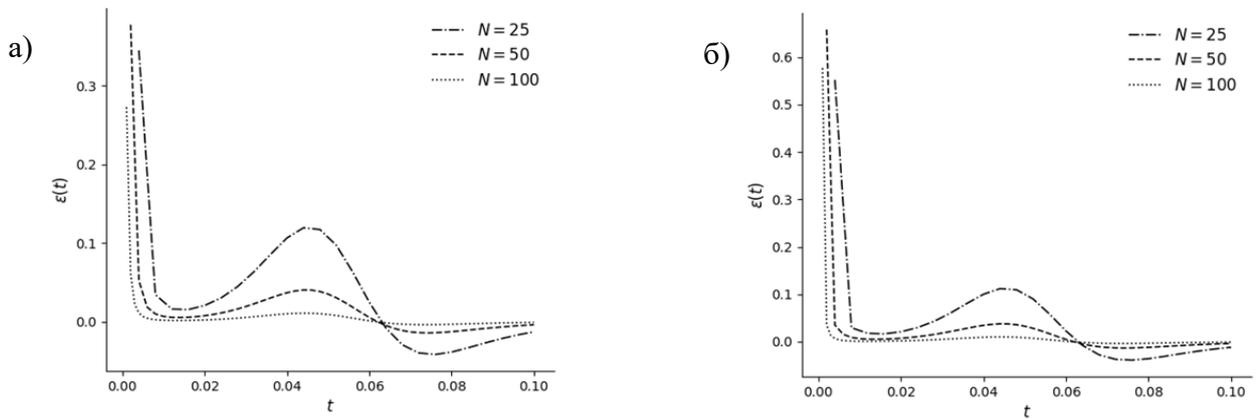


Рис. 3. Ошибка восстановленной функции $\varepsilon(t) = p(t) - p_e(t)$ для $\gamma = 100$: а – локальное наблюдение в точке x_0 ; б – нелокальное наблюдение на границе Γ_R

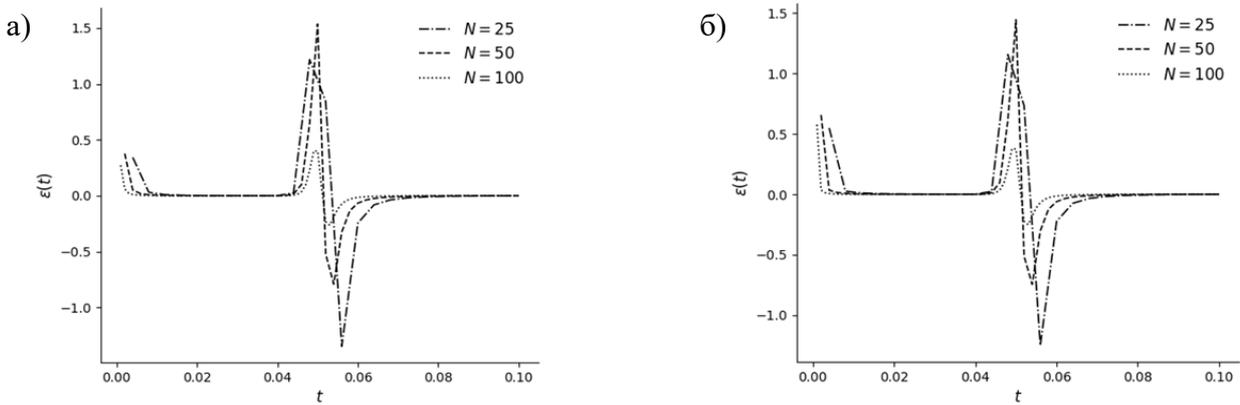


Рис. 4. Ошибка восстановленной функции $\varepsilon(t) = p(t) - p_e(t)$ для $\gamma = 1000$: а – локальное наблюдение в точке x_0 ; б – нелокальное наблюдение на границе Γ_R

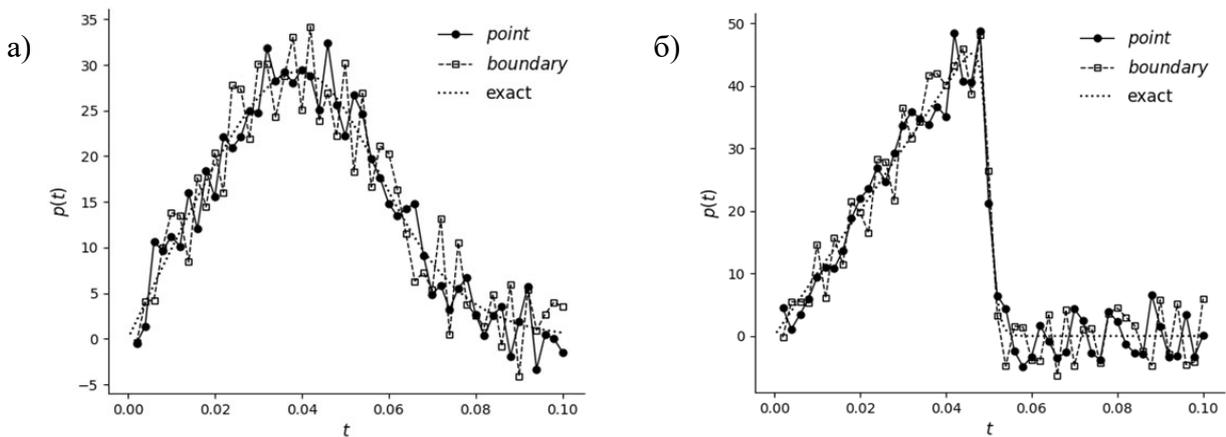


Рис. 5. Восстановленная функция $p(t)$ при зашумлении данных наблюдения с уровнем шума $\delta = 0,05$: а – $\gamma = 100$; б – $\gamma = 1000$



Заключение. Предложен вычислительный алгоритм восстановления нестационарного множителя в правой части уравнения субдиффузии. Вычисление неизвестной функции сводится к решению двух сеточных эллиптических задач на каждом временном слое и использованию заданной дополнительной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения / П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 455 (3). – С. 258-260.
2. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения / П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев, М. В. Васильева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55 (6). – С. 1020-1020.
3. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. – М.: Наука, 2005. – 199 с.
4. Isakov, V. Inverse problems for partial differential equations / V. Isakov // Springer. – 2006.
5. Kilbas, A. A. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // Elsevier. – 2006.
6. Mainardi, F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models / F. Mainardi // World Scientific. – 2022.
7. Miller, L. Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation / L. Miller, M. Yamamoto // Inverse Problems. – 2013. V. 29 (7). P. 075013.
8. Oldham, K. B. The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier // Academic Press, New York. – 1974.
9. Podlubny, I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications / I. Podlubny // Elsevier. – 1998.
10. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin // N.Y.: Marcel Dekker. – 2000.
11. Pskhu, A. Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics / A. Pskhu, S. Rekhviashvili // Mathematics. – 2020. V. 8 (11). P. 2086.
12. Su, L. A numerical method for solving retrospective inverse problem of fractional parabolic equation / L. Su, J. Huang, V. Vasil'ev, A. Li, A. Kardashevsky // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. V. 413. P. 114366.
13. Zhuang, P. Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation / P. Zhuang, F. Liu // Journal of Applied Mathematics and Computing. – 2006. V. 22. P. 87-99.

Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э.
ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ
ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э.
G. V. Alekseev, Yu. E. Spivak

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

CONTROL PROBLEMS FOR A MAGNETOHYDRODYNAMICS STATIONARY MODEL OF A VISCOUS HEAT-CONDUCTING FLUID

Алексеев Геннадий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН; профессор Департамента математического и компьютерного моделирования Дальневосточного федерального университета (Россия, Владивосток).

Gennady V. Alekseev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Principal Researcher, Institute of Applied Mathematics FEB RAS; Professor of Mathematical and Computer Modeling Department, Far Eastern Federal University (Russia, Vladivostok).

Спивак Юлия Эдуардовна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (Россия, Владивосток).

Yuliya E. Spivak – PhD in Physics and Mathematics, Junior Researcher, Institute of Applied Mathematics FEB RAS (Russia, Vladivostok).

Аннотация. Исследуются задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости в приближении Буссинеска. Доказывается глобальная разрешимость общей задачи управления. Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие локальную единственность и устойчивость решений рассматриваемой задачи управления для конкретных функционалов качества.

Summary. Control problems are studied for a magnetohydrodynamics stationary model of a viscous heat-conducting fluid in the Boussinesq approximation. The global solvability of the general control problem is proved. Sufficient conditions are established to ensure local uniqueness and stability of solutions to the control problem under consideration for certain cost functionals.

Ключевые слова: система МГД-Буссинеска, смешанные граничные условия, задача управления, система оптимальности, разрешимость, единственность, оценки устойчивости.

Key words: MHD-Boussinesq system, mixed boundary conditions, control problem, optimality system, solvability, uniqueness, stability estimates.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

УДК 517.95

Введение. Задачи управления магнитогидродинамическими (МГД) течениями электрически- и теплопроводящей жидкости исторически возникли сначала в металлургии и литейном производстве при разработке оптимальных технологий бесконтактного электромагнитного размешивания расплавленных металлов [1] и в ядерной индустрии при создании эффективных систем жидкометаллического охлаждения агрегатов ядерной энергетики [2]. Затем к необходимости решения задач управления привели проблемы, возникающие при создании установок для промышленного выращивания кристаллов методами расплавления и растворения [3] и при разработке новых подводных двигателей [4].

В работах [5; 6] был предложен оригинальный подход к исследованию краевых задач для уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости. Использование этого подхода позволило получить результаты о разрешимости краевых задач при ослабленных условиях на гладкость гранич-

ных данных для магнитного поля. Эта же идея оказалась полезной и при исследовании задач управления для указанной модели МГД [7].

Настоящая работа продолжает развивать направление, начатое в предыдущих работах [5–7]. Её целью является развитие математического аппарата исследования указанной ниже краевой задачи для стационарной модели МГД-Буссинеска, включающего в себя как теоретический анализ, так и вычислительные аспекты.

Постановка краевой задачи. Описание схемы исследования. Пусть Ω – ограниченная область в трёхмерном пространстве с границей Γ , состоящей из двух частей: Γ_D и Γ_N . [Характерные примеры областей Ω представлены на рис. 1.] В работе рассматривается следующая краевая задача для стационарной модели МГД-Буссинеска:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \kappa \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathbf{f} - \mathbf{b}T, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{b} = b\mathbf{G}, \quad (1)$$

$$\nu_1 \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{E} + \kappa \mathbf{H} \times \mathbf{u} = \nu_1 \mathbf{J}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$-\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = q, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{k}, \quad \kappa = \mu/\rho_0, \quad \nu_1 = (\rho_0 \sigma)^{-1} \equiv \kappa \nu_m, \quad (4)$$

$$T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\partial T/\partial n + \alpha T) = \chi \text{ на } \Gamma_N, \quad (5)$$

моделирующая движение вязкой теплопроводящей электрически проводящей жидкости. Здесь используются обычные для данной модели обозначения [1; 2], в частности, \mathbf{u} и \mathbf{H} – векторы скорости и напряжённости магнитного поля, T – температура, b – коэффициент теплового расширения, $\mathbf{g}, \mathbf{k}, q, \psi$ и α, χ – определённые на Γ, Γ_D и Γ_N функции. Слагаемое $\mathbf{b}T = bT\mathbf{G}$ имеет смысл силы плавучести в приближении Буссинеска. Все величины, входящие в (1)–(5), считаются размерными, причём все уравнения записаны в системе единиц СИ.

Разработанная на основе указанного математического аппарата схема исследования задачи (1)–(5) состоит из шести этапов.

На этапе 1 вводится понятие слабого решения задачи (1)–(5) и устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие глобальную разрешимость рассматриваемой задачи и локальную единственность её слабого решения. Одновременно выводятся априорные оценки решения через нормы исходных данных.

На этапе 2 вводятся два функциональных пространства X и Y и оператор $F : X \rightarrow Y$, действующий из X в Y . Пространство X имеет смысл пространства, в котором ищется решение исходной краевой задачи, Y имеет смысл пространства, которому принадлежат исходные данные (правые части уравнений и граничных условий), наконец, F описывает оператор краевой задачи. Все исходные данные задачи разбиваются на две группы: группу фиксированных данных u_0 и группу управлений u , а исходная краевая задача сводится к отысканию решения (главного состояния) $\mathbf{x} \in X$ операторного уравнения $F(\mathbf{x}, u, u_0) = 0$, представляющего собой эквивалентную запись слабой формулировки исходной краевой задачи (1)–(5).

На этапе 3 вводится функционал качества J , адекватно отвечающий цели исследования и зависящий как от состояния \mathbf{x} , так и управления u . В предположении, что u принадлежит выпуклому замкнутому множеству K , формулируется исходная задача управления в виде задачи условной минимизации $J(\mathbf{x}, u) \rightarrow \inf, F(\mathbf{x}, u) = 0, \mathbf{x} \in X, u \in K$. Далее исследуется её разрешимость.

На этапе 4 в дополнение к основным пространствам X и Y вводятся двойственные к ним пространства X^* и Y^* , сопряжённое состояние $\mathbf{y}^* \in Y^*$, лагранжиан $\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u) \rangle_{Y^* \times Y}$, где $\lambda_0 \geq 0$, и вычисляется частная производная Фреше $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \rightarrow Y$ от оператора F в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ локального минимума. Доказывается фредгольмовость оператора $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ и выводятся необходимые условия оптимальности. Они состоят из уравнения Эйлера-Лагранжа $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* + \lambda_0 J'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = 0$ в X^* , где $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* : Y^* \rightarrow X^*$ – сопряжённый к $F'_x(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ оператор, и принципа минимума $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ для всех $u \in K$, образуя

щих вместе с уравнением $F(\hat{x}, \hat{u})$ систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума.

На этапе 5 на основе анализа свойств системы оптимальности устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность и устойчивость решений экстремальных задач.

На этапе 6 разрабатывается эффективный численный алгоритм решения конкретной задачи управления. Один из возможных алгоритмов основывается на использовании построенной системы оптимальности, решение которой находится с помощью итерационного метода Ньютона.

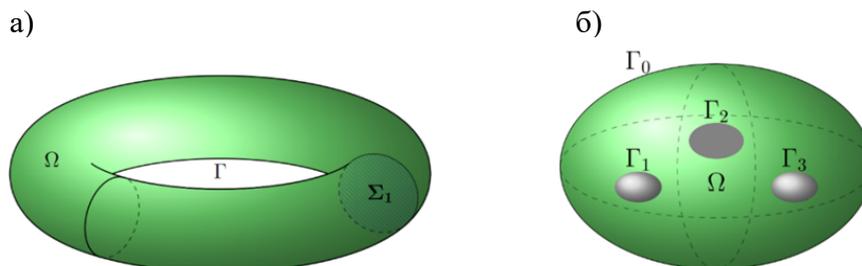


Рис. 1. Характерные примеры областей Ω : а – неодносвязная тороидальная область Ω со связной границей Γ ; б – односвязная область Ω с несвязной границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Заключение. В работе предложен математический аппарат исследования задач управления для стационарной модели МГД вязкой теплопроводной жидкости, описываемой соотношениями (1)–(5). Основная модель состоит из уравнений Навье – Стокса, уравнений Максвелла без токов смещения, обобщённого закона Ома для движущейся среды и уравнения конвекции-диффузии для температуры, нелинейно связанных через силу Лоренца, силу плавучести в приближении Буссинеска и конвективный перенос тепла. Использование предложенного аппарата позволяет доказать глобальную разрешимость общей задачи управления и локальную единственность и устойчивость оптимальных решений. Описанию соответствующих результатов будет посвящена отдельная работа авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верте, Л. А. Магнитная гидродинамика в металлургии / Л. А. Верте. – М.: Металлургия, 1975. – 287 с.
2. Лаврентьев, И. В. Жидкометаллические системы термоядерных реакторов-токамаков / И. В. Лаврентьев // Магнитная гидродинамика. – 1990. – № 2. – С. 105-124.
3. Muller, G. Convection and inhomogeneties in crystal growth from the melt / G. Muller. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1988. – 136 p.
4. Конвер, Д. Внешняя МГД тяга / Д. Конвер, Ж. П. Тибо // Магнитная гидродинамика. – 1995. – Т. 31. – № 34. – С. 328-335.
5. Алексеев, Г. В. Разрешимость неоднородной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости / Г. В. Алексеев // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 6. – С. 760-769.
6. Alekseev, G. V. Mixed boundary value problems for stationary magnetohydrodynamic equations of a viscous heat-conducting fluid / G. V. Alekseev // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. – 2016. – Vol. 18. – No 3. – P. 591-607.
7. Alekseev, G. V. Analysis of control problems for stationary magnetohydrodynamics equations under the mixed boundary conditions for a magnetic field / G. V. Alekseev // Mathematics. – 2023. – Vol. 11. – No 2610. – P. 1-29.



Ковтаныук Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О.
L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko, E. O. Popova

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗОГРЕВ ЗА СЧЁТ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ТРЕНИЯ
МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ЕЁ ДВИЖЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ**

**DEFORMATION AND HEATING DUE TO SURFACE FRICTION OF THE PLUG MATERIAL
IN A ROUND PIPE AS IT MOVES UNDER THE ACTION OF A CHANGING PRESSURE
DIFFERENCE**

Ковтаныук Лариса Валентиновна – член-корреспондент Российской академии наук, профессор Российской академии наук, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток); 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Larisa V. Kovtanyuk – Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Professor of Russian Academy of Sciences, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok); 5 Radio str., Vladivostok, 690041. E-mail: lk@iacp.dvo.ru.

Панченко Галина Леонидовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток); 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru.

Galina L. Panchenko – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok); 5 Radio str., Vladivostok, 690041. E-mail: panchenko@iacp.dvo.ru.

Попова Елена Олеговна – аспирант Института автоматизации и процессов управления ДВО РАН (Россия, Владивосток); 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. E-mail: polenao@bk.ru.

Elena O. Popova – Postgraduate, Institute of Automation and Control Processes of FEB RAS (Russia, Vladivostok); 5 Radio str., Vladivostok, 690041. E-mail: polenao@bk.ru.

Аннотация. С использованием математической модели больших деформаций материалов с упругими, пластическими и вязкими свойствами исследован разогрев материала при его движении в цилиндрической трубе под действием переменного перепада давления. Изменение температуры в материале связано и с его необратимым деформированием, и с трением о граничную шероховатую поверхность трубы. Перепад давления задаётся на граничных поперечных поверхностях материала и сначала возрастает с течением времени, затем становится постоянным. Накапливаемые необратимые деформации могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями. Параметры ползучести, предел текучести и вязкость материала зависят от температуры.

Summary. Using a mathematical model of large strains of materials with elastic, plastic and viscous properties, the heating of a material during its movement in a cylindrical pipe under the action of a variable pressure difference is investigated. The change in temperature in the material is associated with both its irreversible deformation and friction against the boundary rough surface of the pipe. The pressure difference is specified on the boundary transverse surfaces of the material and first increases with time, then becomes constant. Accumulated irreversible strains can be both creep strains and plastic strains. Creep parameters, yield strength and viscosity of the material depend on temperature.

Ключевые слова: ползучесть, вязкопластическое течение, большие деформации, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомодеформирование.

Key words: creep, viscoplastic flow, large strains, deformation heat production, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FFWF-2021-0005, FFWF-2022-0002).

УДК 539.37:539.214

Введение. Термомеханическая обработка металлов и сплавов играет важную роль в различных отраслях промышленности благодаря своей способности улучшать свойства материалов и обеспечивать создание высококачественной продукции. Методы термомеханической обработки, к которым относятся нагрев, охлаждение и механическая деформация, являются важными инструментами в производстве металлических изделий с определёнными характеристиками и качествами. Термомеханическая обработка способствует повышению прочности, устойчивости к износу, ударной вязкости и других механических параметров металлов, что делает их более долговечными и даёт возможность использовать в условиях повышенной нагрузки или трения. Актуальными задачами современной промышленности являются задачи определения напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций в условиях термомеханических воздействий, когда анализ поведения деформируемых материалов требует одновременного учёта их упругих, пластических и вязких свойств. Учёт связанности полей деформаций и температуры значительно усложняет используемые модельные соотношения. В областях течения необратимые деформации необходимо большие, поэтому задачи о неизоэнтальпических течениях требуют рассмотрения в рамках модели больших упругопластических деформаций. Здесь остановимся на модели, в которой, согласно формализму неравновесной термодинамики, обратимые и необратимые деформации задаются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса) [1].

Связанные задачи о прямолинейных течениях упруговязкопластических материалов ранее рассматривались в [2–4]. Здесь рассмотрим случай, когда необратимые деформации, накапливаемые материалом, могут быть деформациями и ползучести, и пластичности [5–7].

Следуя аналогичному подходу, приведём решение неизоэнтальпической краевой задачи о необратимом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе. Задача, когда несжимаемый упруговязкопластический материал находится в условиях жёсткого сцепления со стенками трубы (тепло создаётся внутри только за счёт необратимого деформирования) и подвергается действию изменяющегося со временем перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки, рассмотрена в [8]. Здесь, в отличие от [8], будем полагать, что разогрев материала происходит и за счёт трения материала о жёсткую граничную поверхность, и создаётся внутри за счёт необратимого деформирования.

Основные модельные соотношения. Согласно теории больших упругопластических деформаций [1], тензоры обратимых \mathbf{m} и необратимых \mathbf{p} деформаций задаются дифференциальными уравнениями изменения (переноса) в форме

$$\frac{D\mathbf{m}}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \quad \frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \boldsymbol{\theta} \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} - \nabla^T \vec{v}), \quad \boldsymbol{\theta} = (T - T_0) T_0^{-1},$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}$ – скорости (источники) изменения необратимых и обратимых деформаций; $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ – нелинейная часть тензора вращений $\boldsymbol{\varphi}$ ($\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\varphi}^T$); \vec{v} – вектор скорости; T , T_0 – соответственно текущая температура и температура среды в недеформированном состоянии (комнатная температура); \mathbf{e} – тензор, задающий упругие деформации; α – коэффициент линейного расширения; \mathbf{I} – единичный тензор, составленный из символов Кронекера. Вторая зависимость (1) определяет объективную производную по времени, задающую взаимовлияние обратимых и необратимых деформаций в процессе деформирования, что обеспечивает геометрическую корректность кинематики среды.

Согласно зависимостям (1), тензор полных деформаций Альманси \mathbf{d} через обратимую и необратимую составляющие записывается в форме

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u} - \nabla^T \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}, \quad (2)$$

где \vec{u} – вектор перемещений. Считаем, что деформируемый материал является механически несжимаемым и изменение его объёма может происходить только за счёт теплового расширения. Согласно уравнению неразрывности, такое условие записывается в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3 \right)^{\frac{1}{2}} = (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1}, \quad (3)$$

$$I_1 = d_{ii}, \quad I_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_3 = d_{ik}d_{kj}d_{ji}.$$

Для упрощения математической модели принимается гипотеза о независимости термодинамического потенциала (свободной энергии) $\Psi(\mathbf{m}, \theta)$ от необратимых деформаций \mathbf{p} . Из закона сохранения энергии следуют [1] равенства

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}); \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\text{div} \vec{J} - T^{-2} \vec{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений; P – неизвестная функция добавочного гидростатического давления; ρ – плотность среды; s – плотность энтропии; $\vec{J} = \rho \vec{v}s + \vec{q}$ – поток энтропии; \vec{q} – поток тепла; $W = \rho_0 \Psi(\mathbf{m}, \theta)$ – упругий потенциал, здесь ρ_0 – плотность материала в его свободном состоянии. Предположение об изотропии деформируемого материала позволяет принять упругий потенциал в виде разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния [9]:

$$W = W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b - \mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \nu_2 \theta^2 - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \dots \quad (6)$$

$$J_1 = \text{tr} \mathbf{c}, \quad J_2 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5 \mathbf{m} \cdot \mathbf{m},$$

где μ – модуль сдвига; b , χ , ν_m ($m = 1, 2, \dots, 6$) – иные термомеханические постоянные. Если принять закон теплопроводности в простейшей форме Фурье, то из (5) и (6) следует уравнение теплопроводности:

$$(1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \text{tr} \mathbf{c}) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{c} = g \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (7)$$

$$\beta_1 = \frac{\nu_2(1 - 3\alpha T_0) - 3\nu_6}{\nu_2}, \quad \beta_2 = -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \quad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2},$$

где g – коэффициент температуропроводности.

Диссипативный механизм деформирования связан с реологическими и пластическими свойствами материала. Считаем, что необратимые деформации накапливаются в материале с начала процесса деформирования и могут быть как деформациями ползучести, так и пластичности. В областях, где напряжённое состояние ещё не достигло поверхности текучести или где пластическое течение было, но прекратилось, накопление необратимых деформаций происходит в процессе его ползучести. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим в форме степенного закона ползучести Нортон [10]. В этом законе тензор скоростей необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ полагается равным тензору скоростей деформаций ползучести $\boldsymbol{\varepsilon}^v$:

$$V(\boldsymbol{\sigma}) = B\Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|, \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0 (1+\theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0 (1+\theta)},$$
(8)

где $V(\boldsymbol{\sigma})$ – термодинамический потенциал; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений; B, n – параметры ползучести материала; c_1, σ_0, b_1 и b_2 – постоянные материала; Q – энергия активации; R_u – универсальная газовая постоянная [11].

При увеличении нагружающих усилий в некоторый момент времени напряжённое состояние достигает поверхности текучести и в материале начинается пластическое течение. Это приводит к смене диссипативного механизма деформирования. В увеличивающейся области пластического течения полагаем, что $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^p$, где $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензор скоростей пластических деформаций. Считаем, что накопленные к моменту начала пластического течения необратимые деформации ползучести (8) являются начальными значениями для накапливающихся далее в области течения пластических деформаций. В случае учёта вязких свойств среды при пластическом течении также требуется совпадение скоростей необратимых деформаций при изменении механизма деформирования с вязкого на пластический.

Следствием принципа максимума Мизеса является ассоциированный закон пластического течения [12]:

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = k, \quad \lambda > 0, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{v_0},$$
(9)

где k – предел текучести; $\boldsymbol{\varepsilon}^{v_0}$ – тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения.

В качестве пластического потенциала примем [12] обобщённое условие пластического течения Треска – Сен-Венана:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\alpha_k|,$$

$$k = k_0 \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right)^2, \quad \eta = \eta_0 \text{Exp}(-\nu T_0 \theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1},$$
(10)

где η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению; α_k – главные значения тензора $\boldsymbol{\alpha}$; k_0, η_0 – соответственно предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре; T_m – температура плавления деформируемого материала; ν – экспоненциальная скорость [13].

Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения. Пусть в недеформируемой цилиндрической трубе радиуса R расположена пробка конечной длины l . Верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается переменным давлением. Для решения задачи используется цилиндрическая система координат r, φ, z ; полагаем $\theta = \theta(r, t)$, $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$, $P = P(r, z, t)$, где u и v – отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости.

Перепад давления $p(t)$ на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ задаётся в виде

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0,$$
(11)

где $r = 0$ – координата максимального перемещения граничных точек пробки.

Пока увеличивающееся со временем давление не достигнет определённого значения, материал удерживается в состоянии прилипания ($u|_{r=R} = v|_{r=R} = 0$) к стенке трубы за счёт сухого трения: $|\sigma_{rz}|_{r=R} < s_0$, (s_0 – задаваемая постоянная сухого трения).

Пока напряжённое состояние в материале не достигло поверхности нагружения, пластическое течение отсутствует и необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование материала вызывает его разогрев. Для изменяющейся температуры принимаем следующие условия:

$$\theta(r,0) = 0, \quad \partial\theta(r,t)/\partial r|_{r=0} = 0, \quad \theta(R,t) = 0. \quad (12)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что в рассматриваемом случае антиплоского движения тепловое расширение в материале отсутствует, таким образом, зависимости (3), (4) и (7) справедливы при $\alpha = 0$.

В зависимостях (4) для компонент тензора напряжений ограничимся слагаемыми первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго – по компоненте m_{rz} [6–8].

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае имеют форму

$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \sigma_{rz}r^{-1} = 0, \quad \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})r^{-1} = 0. \quad (13)$$

Из второго уравнения (13) с учётом граничных условий (11) получаем

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (14)$$

Потенциал ползучести (8) принимает вид

$$V(\sigma_{ij}) = B \left((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{zr} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (15)$$

В (15) ограничимся слагаемыми до порядка n по напряжениям, тогда кинематические соотношения с учётом (1), (2), (4) и (14) принимают форму

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v}{2} \frac{m_{rr} - m_{zz}}{m_{rz}}, \quad (16)$$

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1\theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn \left(\frac{pr}{l} \right)^{n-1} dt, \quad u' = 2(m_{rz} + p_{rz}).$$

С учётом (14) и (16) уравнение теплопроводности (7) примет форму

$$\left(1 + \beta_1\theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^3} \right) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 pr^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) - \frac{Bn}{2v_2} \left(\frac{pr}{l} \right)^n, \quad l_1 = v_1 + v_5, \quad (17)$$

Уравнение теплопроводности (17) при условиях (12) было решено численно.

Интегрируя последнее уравнение (16) при условии прилипания, найдём перемещения.

Учитывая зависимости (4), граничные условия (11) и интегрируя первое уравнение равновесия (13), получим зависимости для вычисления компонент тензора напряжений по найденным ранее распределениям температуры, перемещений и компонентам обратимых деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{p}{l}(z-l-u(0,t)) - \int_0^r \frac{2(\mu-l_1\theta)m_{rr} + (3\mu+l_1\theta)m_{rz}^2}{r} dr + 2(\mu-l_1\theta)(m_{zz}-m_{rr}) - \\ &- 2(\mu-l_1\theta)(m_{zz}(0,t)-m_{rr}(0,t)), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} + 2(\mu-l_1\theta)(m_{rr}-m_{zz}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{zz} - 2(\mu-l_1\theta)m_{zz} - (3\mu+l_1\theta)m_{rz}^2.\end{aligned}\quad (18)$$

При дальнейшем увеличении давления в момент времени t_1 , вычисляемый из уравнения $p(t_1) = 2ls_0R^{-1}$, выполнится равенство $|\sigma_{rz}|_{r=R} = s_0$ и пробка начнёт проскальзывать вдоль стенки трубы. Поэтому условие прилипания заменим на условие

$$(\sigma_{rz} + s_0 + \xi v)|_{r=R} = 0, \quad (19)$$

где ξ – постоянная вязкого трения. С момента времени t_1 материал начинает нагреваться ещё и из-за трения о жёсткую стенку трубы. В этом случае заменим первое условие (12) условием непрерывности температуры в момент времени t_1 , а третье условие (12) – следующим граничным условием:

$$\theta(R,t) = \gamma_1 u(R,t), \quad (20)$$

где γ_1 – задаваемая постоянная теплопроизводства за счёт трения. Также полагаем, что температура θ не достигает температуры плавления в процессе деформирования.

Расчёт температуры и параметров напряжённо-деформированного состояния с момента времени t_1 осуществляется по тем же самым формулам, что и в случае прилипания. Единственным отличием является то, что при интегрировании последнего уравнения (16) для перемещения используется следующее из (14) и (19) граничное условие:

$$u(R,t) = \frac{R}{2\xi l} \int_{t_1}^t p dt - \frac{s_0(t-t_1)}{\xi}.$$

Полученное решение неизоэнтальной задачи при возрастающем перепаде давления остаётся справедливым до момента времени t_2 , который находится из уравнения $p(t_2)R = 2lk(t_2)$. При $t = t_2$ на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (10) в виде $|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_2)$.

Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном перепаде давления. С момента времени t_2 в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет область течения от области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает деформироваться вязкоупруго. Согласно формулам (4), уравнениям равновесия (13) и условиям непрерывности компонент напряжений на границе $r = m(t)$, зависимость для компоненты σ_{rz} (14) справедлива и в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$, и в области течения $m(t) \leq r \leq R$.

В области $0 \leq r \leq m(t)$ компоненты тензора скоростей деформаций ползучести определяются соотношениями из (16), и выполняется уравнение теплопроводности (17).

Из ассоциированного закона пластического течения (9) следует, что условие пластичности (10) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0, \varepsilon_{rz}^p < 0$) принимает форму

$$\sigma_{rz} = -k + \eta(\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}). \quad (21)$$

Из соотношений (21) и (14) вычислим компоненту ε_{rz}^p :

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}, \quad \varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (22)$$

В формулах (21) и (22) $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ – компонента скоростей деформаций ползучести ε_{rz}^v в точке в момент достижения её упругопластической границей.

Уравнение движения границы $r = m(t)$ получим из условия непрерывности на ней скоростей необратимых деформаций (16) и (22):

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m,t)}{\theta_m} \right)^2. \quad (23)$$

Уравнение теплопроводности (7) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ с использованием зависимостей (14) и (22) принимает вид

$$\left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{pr}{2lv_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \quad (24)$$

Уравнения (17), (22)–(24) образуют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. К этой системе добавим второе граничное условие (12), условие (20) и начальные условия $m(t_2) = R$, $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$. Также примем непрерывность функции θ и её производной $\partial\theta/\partial r$ на границе $r = m(t)$ и непрерывность температуры в момент начала течения t_2 . Для решения этой системы уравнений разработан алгоритм на основе конечно-разностного метода.

Компонента необратимых деформаций p_{rz} в области течения находится интегрированием дифференциального уравнения, следующего из (1) и (22):

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (25)$$

При решении уравнения (25) используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_2 . Компоненты обратимых и необратимых деформаций в обеих областях вычисляются из системы уравнений, следующей из (1). По вычисленным значениям температуры и деформаций с учётом условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$ напряжения в обеих областях находятся из зависимостей (18).

Если с некоторого момента времени $t_3 > t_2$ перепад давления на граничных поверхностях пробки положить постоянным, равным $p(t_3)$, то в материале по-прежнему присутствуют область вязкоупругого деформирования $0 \leq r \leq m(t)$ и развивающаяся область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Все соотношения данного раздела остаются справедливыми и в данном случае, при $\partial p/\partial t = 0$.

Расчёты проводились в безразмерных переменных r/R и $\tau = b_3 t/\mu$ при линейной функции $p(t) = b_3 t$. Значения безразмерных постоянных выбирались следующими: $\beta_1 = 0.098$, $\beta_3 = -4.5$, $k_0 \mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}$, $\theta_m = 2.074$, $l_1 \mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $g \mu b_3^{-1} R^{-2} = 2.638 \times 10^4$, $v_2 \mu^{-1} = 0.1$, $b_1 = 2.518$, $b_2 T_0^{-1} = 1.482$, $c_1 \mu b_3^{-1} = 4.887 \times 10^4$, $\sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}$, $QR_u^{-1} T_0^{-1} = 52.37$, $b_3 \eta_0 \mu^{-2} = 3.257 \times 10^{-6}$, $b_3 \xi R \mu^{-2} = 2.605 \times 10^{-4}$, $v T_0 = 1.212$.

На рис. 1 представлен график изменения границы области вязкопластического течения в зависимости от времени τ в промежутке от $\tau_2 = 0.0083$ до $\tau_3 = 0.0084$. Распределение температу-

ры θ в момент времени τ_3 по материалу пробки представлено на рис. 2. Рис. 3 и 4 иллюстрируют графики компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} и перемещений в зависимости от радиуса r/R в момент времени τ_3 .

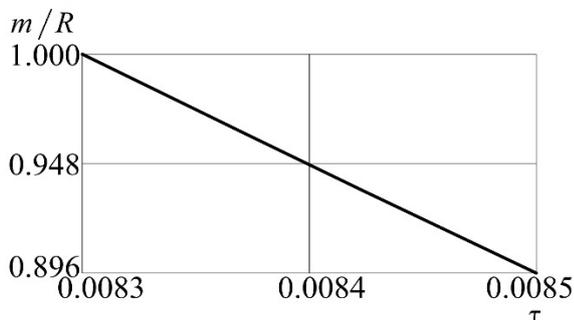


Рис. 1. Упругопластическая граница

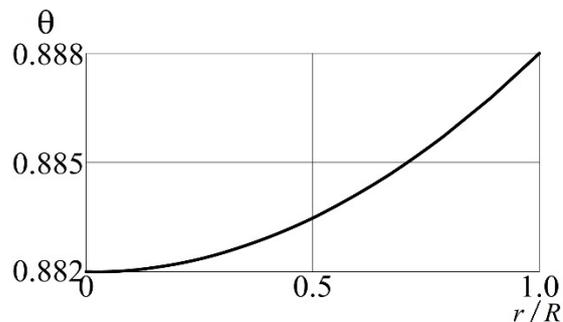


Рис. 2. Распределение температуры

Заключение. В данной статье получено решение связанной краевой задачи теории больших деформаций о неізотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе, под действием возрастающего со временем перепада давления. Накопление необратимых деформаций в материале связано с его ползучестью и последующим пластическим течением. Разогрев материала происходит за счёт процессов необратимого деформирования и трения материала о граничную поверхность трубы. Рассмотрены процесс ползучести материала при возрастающем давлении, возникновение и развитие вязкопластического течения при возрастающем и постоянном давлении. Рассчитаны температура и параметры напряжённо-деформированного состояния на каждом этапе нагружения, установлена закономерность продвижения упругопластической границы по деформируемому материалу.

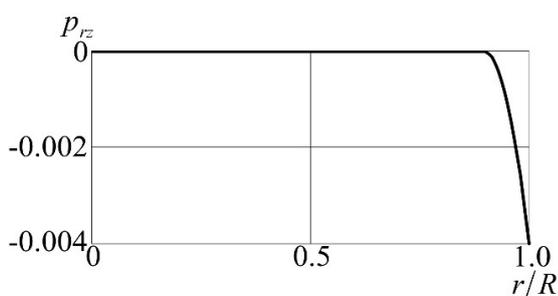


Рис. 3. Компонента p_{rz}

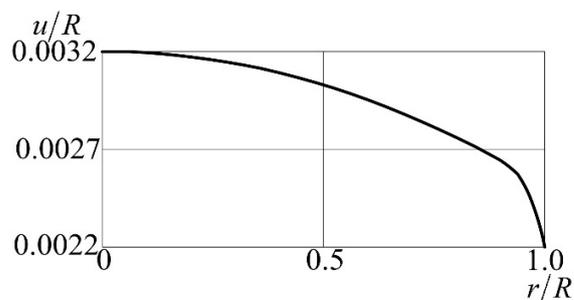


Рис. 4. График перемещений

Учёт трения материала о граничную поверхность трубы приводит к значительному по сравнению с [12] повышению температуры в материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин, А. А. Большие необратимые деформации и упругое последствие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. – Владивосток: Дальнаука, 2013. – 312 с.
2. Буренин, А. А. Неізотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 464. – № 3. – С. 284-287.
3. Буренин, А. А. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счёт трения о шероховатую плоскость / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 56. – № 4 (332). – С. 101-111.



4. Буренин, А. А. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счёт изменяющегося перепада давления / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 6-18.
5. Бегун, А. С. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов / А. С. Бегун, А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – № 3. – С. 275-278.
6. Бегун, А. С. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования / А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2018. – № 1. – С. 103-112.
7. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии / А. А. Буренин, К. Н. Галимзянова, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 482. – № 4. – С. 403-406.
8. Ковтанюк, Л. В. О теплотворной способности необратимого деформирования материала пробки в круглой трубе / Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1 (59). – С. 88-100.
9. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
10. Norton, F. H. The creep steel of high temperature / F. H. Norton. – Y.: Mc Graw Hill, 1929. – 110 p.
11. Alain I. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence / I. Alain // Journal of Materials Science. – 1998. – V. 33. – P. 3201-3206.
12. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
13. Pla F. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio / F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – V. 238. – I. 5. – P. 572-580.

Трухин В. О., Анисич А. И., Лобанова Э. А., Нефедев К. В.
V. O. Ttukhin, A. I. Anisich, E. A. Lobanova, K. V. Nefedev

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА МОДЕЛИ ИЗИНГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

REALIZATION OF NON-CLASSICAL ALGORITHM OF FULL BRUTE-FORCE SEARCH OF ISING MODEL USING CUDA TECHNOLOGY

Трухин Вячеслав Олегович – старший преподаватель Дальневосточного федерального университета, младший научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (Россия, Владивосток).

Viacheslav O. Trukhin – Senior Lecturer, Far Eastern Federal University, Junior Researcher, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS (Russia, Vladivostok).

Анисич Александр Игоревич – студент Дальневосточного федерального университета (Россия, Владивосток).

Alexandr I. Anisich – Student, Far Eastern Federal University (Russia, Vladivostok).

Лобанова Элиза Александровна – студент Дальневосточного федерального университета, лаборант Института прикладной математики ДВО РАН (Россия, Владивосток).

Eliza A. Lobanova – Student, Far Eastern Federal University, Laboratory Assistant, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern branch of RAS (Russia, Vladivostok).

Нефедев Константин Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор департамента теоретической физики и интеллектуальных технологий ИНТиПМ Дальневосточного федерального университета, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН (Россия, Владивосток). E-mail: nefedev.kv@dvfu.ru.

Konstantin V. Nefedev – Holder of an Advanced Doctorate (Doctor of Science) in Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Theoretical Physics and Intelligent Technologies, Institute of High Technologies and Advanced Materials, Far Eastern Federal University (Russia, Vladivostok). E-mail: nefedev.kv@dvfu.ru.

Аннотация. В статье представлен алгоритм полного перебора модели Изинга. Основные методы, применяемые при расчётах, это использование технологии CUDA и параллелизация на архитектуре графического процессора. Подробно описываются структура алгоритма и его применение к решению задач в статистической термодинамике. Уделено внимание сравнению скорости работы алгоритма относительно классического переборного алгоритма на Python и C++. Предложенный подход позволяет проводить точные расчёты для систем квадратной решётки спинов модели Изинга со случайным распределением обменных констант.

Summary. The paper presents an algorithm for complete enumeration of the Ising model. The main methods used in the calculations are the use of CUDA technology and parallelization on GPU architecture. The structure of the algorithm and its application to the solution of problems in statistical thermodynamics are described in detail. Attention is paid to the comparison of the speed of the algorithm with respect to the classical brute-force algorithm in Python and C++. The proposed approach allows carrying out accurate calculations for systems of the square lattice of spins of the Ising model with a random distribution of exchange constants.

Ключевые слова: статистическая физика, модель Изинга, точное решение, алгоритмы, параллельные вычисления, графический процессор.

Key words: statistical physics, Ising model, exact solution, algorithms, parallel computing, GPU.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-71-10069, <https://rscf.ru/project/24-71-10069/>.

УДК 537.611.2

Введение. Поиск точных решений для статистических моделей, с одной стороны, является критически важным для прогнозирования или описания реальных событий и экспериментов, с другой стороны, это вычислительно сложная проблема и может служить мерой эффективности как программного, так и аппаратного обеспечения.

В данной работе показан алгоритм поиска точного решения, которое представлено в виде плотности всех возможных состояний для квадратной решётки спинов модели Изинга (МИ) со случайным распределением обменных констант [1; 2], пример приведён на рис. 1. Эта модель не ограничивается лишь статистической физикой и может быть представлена в виде графа. Таким образом, решения данной модели вызывают интерес в различных областях науки. В настоящее время активно ведутся работы по оптимизации таких решений [3].

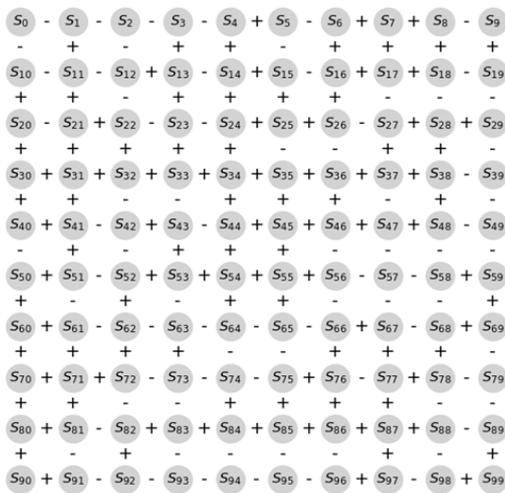


Рис. 1. Пример решётки со случайным распределением обменных констант

Термодинамические системы с фиксированным количеством частиц могут быть охарактеризованы канонической статистической суммой. Значение этой функции заключается в том, что производные от неё позволяют вычислить важные термодинамические параметры системы, такие как свободная энергия и теплоёмкость. Точное решение для статистической суммы есть для двумерной МИ [4], однако это решение не позволяет моделировать поведение системы со случайным распределением обменных констант или с заданным магнитным полем, но является хорошим подспорьем в проверке точности различных алгоритмов. Для решения задачи нахождения минимума в настоящее время существуют различные алгоритмы, такие как алгоритмы машинного обучения [5], квантовый алгоритм адиабатического отжига [6], нейронные сети [7] и множество стохастических алгоритмов [8]. Однако, в отличие от упомянутых методов, стохастические алгоритмы могут тратить слишком много времени на термализацию.

Модель Изинга. Простое математическое описание модели Изинга [9] вместе с отсутствием её точного решения делает её эталоном в теории сложности, т. к. любая NP-сложная задача может быть сведена к задаче нахождения вектора состояний для МИ со случайным распределением обменных констант [10; 11; 12].

В работе полная энергия взаимодействия рассчитывается по формуле

$$E = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j,$$

где $S_i \in \{-1; 1\}$, $J_{ij} \in \{-1; 1\}$, $\langle i, j \rangle$ – суммирование по ближайшим соседям.

Алгоритм. На вход алгоритма мы подаём матрицу связей J и линейный размер системы L , в результате работы мы хотим получить данные, которые опишут систему во всех её состояниях, т. е. энергия – спиновый избыток – вырождение.

На первом этапе берутся нулевой и первый столбцы, рассчитывается их плотность состояний как независимых одномерных цепочек и для каждой заполняется 4-мерный массив: первая ось – это удвоенная максимальная энергия +1, вторая ось – удвоенный спиновый избыток +1, третья ось – это конфигурации, её размер 2^L , и четвёртая ось имеет размерность количества простых чисел, остатки от деления на которые записываются по этим координатам, размер этой оси также увеличен на 1 для проверки на совпадение. Избежать добавления этой оси можно только в случае размерности системы, не превышающей 8×8 , в ином случае вырождение может выходить за рам-

ки целочисленного встроенного типа данных большинства низкоуровневых языков. Устройство функции представлено на рис. 2.

Второй этап заключается в соединении двух массивов состояний, полученных на предыдущем шаге, в один новый, размерность которого будет учитывать новое количество спинов. Устройство функции представлено на рис. 3.

Третий этап закичивает первую и вторую функции до конца решётки, формулы для расчёта размерности на каждом этапе весьма тривиальны. В последнем приращении у финального массива состояний можно не задавать ось конфигураций.

```
-----  
Функция generator_EMC(L, EMC, S, E_max, M_max, m)  
  x := blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x  
  length_dev := 2 ^ L  
  E_add := (E_max - 1) / 2  
  M_add := (M_max - 1) / 2  
  
  Для i от x до length_dev с шагом blockDim.x * gridDim.x  
    E := 0  
    M := 0  
    Для j от 0 до L - 2  
      E := E - J_vertical[j * L + m] * S[i * L + j] * S[i * L + j + 1]  
      M := M + S[i * L + j]  
    КонецДля  
    M := M + S[i * L + L - 1]  
    E := E + E_add  
    M := M + M_add  
    atomicAdd(EMC[i * E_max * M_max * prime_n_dev + E * M_max *  
prime_n_dev + M * prime_n_dev], 1)  
    Для j от 1 до prime_n_dev - 1  
      atomicAdd(EMC[i * E_max * M_max * prime_n_dev + E * M_max *  
prime_n_dev + M * prime_n_dev + j], 1)  
    КонецДля  
  КонецДля  
КонецФункции  
-----
```

Рис. 2. Алгоритм перебора одномерной цепочки и заполнения массива

На последнем этапе мы должны раскодировать массив просуммированных остатков от деления на простые числа в массив вырождений, делаем это, основываясь на китайской теореме об остатках и расширенном алгоритме Эвклида [13].

Ускорение вычислений достигается за счёт расчёта уникального индекса для каждого CUDA-ядра [14], что позволяет каждому потоку обрабатывать свой участок данных. Это достигается путём распараллеливания внешнего цикла, где индексы вычисляются как $x = \text{blockIdx.x} \times \text{blockDim.x} + \text{threadIdx.x}$, и итерации по массиву данных с шагом $\text{blockDim.x} \times \text{gridDim.x}$, что обеспечивает эффективное использование ресурсов GPU и минимизирует время выполнения.

Быстродействие. В рамках анализа быстродействия алгоритма было проведено сравнение времени работы алгоритма с алгоритмами прямого перебора, написанными на Python и C++, с технологиями параллелизации по ядрам процессора (см. табл. 1). Использование метода прямого перебора для сравнения аргументировано тем, что именно его можно взять за эталон сложности для данных методов. Таким образом, мы смогли наблюдать кратное превосходство разработанного метода, что развивает интерес дальнейших исследований в этой области. В строке «CUDA» представлен полученный алгоритм перебора.

```

Функция unifying(L, EMC_l, E_max_l, M_max_l, EMC_r, E_max_r, M_max_r, EMC_created, E_max_created,
M_max_created, S, column_number)
    x := blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x
    length_dev := 2 ^ L
    E_add_l := (E_max_l - 1) / 2
    M_add_l := (M_max_l - 1) / 2
    E_add_r := (E_max_r - 1) / 2
    M_add_r := (M_max_r - 1) / 2
    E_add_created := (E_max_created - 1) / 2
    M_add_created := (M_max_created - 1) / 2

    Для conf_l от x до length_dev с шагом blockDim.x * gridDim.x
        Для E_l от 0 до E_max_l - 1
            Для M_l от 0 до M_max_l - 1
                Для conf_r от 0 до length_dev - 1
                    Для E_r от 0 до E_max_r - 1
                        Для M_r от 0 до M_max_r - 1
                            Если (EMC_l[conf_l * E_max_l * M_max_l * prime_n_dev + E_l * M_max_l *
                                prime_n_dev + M_l * prime_n_dev] > 0
                                И EMC_r[conf_r * E_max_r * M_max_r * prime_n_dev + E_r * M_max_r *
                                    prime_n_dev + M_r * prime_n_dev] > 0) Тогда

                                E := 0
                                M := 0

                                Для j от 0 до L - 1
                                    E := E - J_horizontal[j * (L - 1) + column_number] * S[conf_l
                                        *
                                        L + j] * S[conf_r * L + j]
                                КонецДля

                                E := E + E_l - E_add_l + E_r - E_add_r + E_add_created
                                M := M + M_l - M_add_l + M_r - M_add_r + M_add_created

                                atomicAdd(&EMC_created[conf_r * E_max_created * M_max_created *
                                    prime_n_dev + E * M_max_created * prime_n_dev + M * prime_n_dev],
                                    1)

                                Для j от 1 до prime_n_dev - 1
                                    atomicAdd(&EMC_created[conf_r * E_max_created * M_max_created *
                                        prime_n_dev + E * M_max_created * prime_n_dev + M * prime_n_dev
                                        + j], EMC_l[conf_l * E_max_l * M_max_l * prime_n_dev +
                                            E_l * M_max_l * prime_n_dev + M_l * prime_n_dev + j])
                                КонецДля
                            КонецЕсли
                        КонецДля
                    КонецДля
                КонецДля
            КонецДля
        КонецДля
    КонецФункции
    
```

Рис. 3. Алгоритм перебора соседних цепочек спинов и заполнение соответствующего массива

Сравнение времён, затрачиваемых на полный перебор систем спинов Изинга с помощью различных программных средств (значения указаны в секундах)

| Технология | Размерность | | | | |
|-------------------|-------------|-------|---------|--------|--------|
| | 3x3 | 4x4 | 5x5 | 6x6 | 7x7 |
| Один поток Python | 0 | 4,09 | - | - | - |
| Python + numba | 0 | 0,046 | 66 | - | - |
| Один поток на C++ | 0,003 | 0,201 | 204,564 | - | - |
| C++ + OpenMP | - | - | 23,443 | - | - |
| CUDA | 0,305 | 0,602 | 2,385 | 15,153 | 89,114 |

Заключение. В результате работы алгоритма мы получаем уникальные данные, характеризующие исследуемую систему. Уникальность заключается в том, что можно определить, глобальный ли минимум был найден с помощью алгоритмов, не являющихся точными, например, Монте-Карло или генетического алгоритма [15]. Также это позволяет определить оптимальное количество шагов для метода Метрополиса, необходимых для нахождения глобального минимума.

Полученные с помощью алгоритма характеристики состояний позволяют рассчитать свойства спиновых систем, которые без полной плотности состояний получить нельзя. В том числе удалось классифицировать решётку Эдвардса – Андерсена на ферромагнитное, антиферромагнитное состояния и состояние спинового стекла, а также провести численный эксперимент по определению фазовых свойств таких решёток в поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roma F and Risau-Gusman, S and Ramirez-Pastor, AJ and Nieto, F and Vogel, EE Physical Review B-Condensed Matter and Materials Physics Ground-state topology of the Edwards-Anderson J spin glass model 82 21 214-401 2010.
2. Katzgraber, Helmut G and Lee, Lek Wee, Correlation length of the two dimensional Ising spin glass with bimodal interactions, Physical Revive B – condensed Matter and Materials Physics, 71:13, (2005), 134-404.
3. Romero, Joshua and Bisson, Mauro and Fatica, Massimiliano and Bernaschi, Massimo Computer Physics Communicationspaper High performance implementations of the 2D Ising model on GPUs (2020) 256.
4. Onsager, Lars. (1944). Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. Physical Review, 65(3-4), 117. APS.
5. Maren, Alianna J. (1991). A logical topology of neural networks. In Proceedings of the Second Workshop on Neural Networks.
6. Grant, Erica K, Humble, Travis S. (2020). Adiabatic quantum computing and quantum annealing. In Oxford Research Encyclopedia of Physics.
7. Korol, Alyona Olegovna, Captain, Vitaly Yurievich. (2021). Neural network for determining the Curie temperature of the two-dimensional Ising model. Far Eastern Mathematical Journal, 21(1), 51-60. Institute of Applied Mathematics, Far East Branch of RAS.
8. Janke, Wolfhard. (2008). Monte Carlo methods in classical statistical physics. In Computational many-particle physics (pp. 79-140). Springer.
9. E. Ising, Z. Phys. XXXI (1925).
10. Markovich, LA. (2019). Parallel algorithm based on the Ising model for solving combinatorial optimization problems. In Information Technology and Systems 2019 (p. 350-358).
11. C. H. Papadimitriou, The Euclidean travelling salesman problem is np-complete, Theoretical computer sciences 4 (3) (1977).
12. Karp, Richard M. (2010). Reducibility among combinatorial problems. Springer.
13. Katz, Victor J. (2007). The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook. Princeton University Press.
14. NVIDIA CUDA, [HTTPS://DEVELOPER.NVIDIA.COM/CUDA-ZONE](https://developer.nvidia.com/cuda-zone).
15. Panchenko, Tatyana Vyacheslavovna, Tarasevich, Yuri Yurievich. (2007). Comparative analysis of the efficiency of application of genetic algorithms and Metropolis algorithm in problems of solid state physics. Computational Methods and Programming, 8, 77-87.



Мурашкин Е. В.
E. V. Murashkin

УСЛОВИЯ АТЕРМИЧНОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЛЯ ПОЛУИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

ATHERMALITY CONDITIONS OF LONGITUDINAL WAVES FOR SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC MICROPOLAR MEDIA

Мурашкин Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (Россия, Москва); 119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1. E-mail: murashkin@ipmnet.ru.

Evgenii V. Murashkin – PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS (Russia, Moscow); 119526, Russia, Moscow, Prospect Vernadskogo, 101-1. E-mail: murashkin@ipmnet.ru.

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются процессы распространения связанных тепловых и атермических волн инкремента температуры, трансляционных и спинорных перемещений. Особое внимание уделено условиям атермичности волновых поверхностей слабых разрывов, распространяющихся по полуизотропной термоупругой микрополярной среде. С этой целью используются геометрические и кинематические условия Адамара – Томаса. Изучаются слабые разрывы решений связанной системы уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости. Найдены скорости распространяющихся волновых поверхностей трансляционных и спинорных перемещений. Получены соотношения между амплитудными факторами слабого разрыва температурного поля и векторами разрывов трансляционных и спинорных смещений, характеризующих атермические свойства исследуемых связанных термоупругих волн.

Summary. The present paper is devoted to the processes of propagation of coupled thermal and athermal waves of temperature increment, translational and spinor displacements. Particular attention is paid to the conditions of athermality of wave surfaces of weak discontinuities propagating in a semi-isotropic thermoelastic micropolar medium. For this aim, the geometric and kinematic Hadamard–Thomas conditions are used. Weak discontinuities of solutions of the coupled system of partial differential equations of semi-isotropic micropolar thermoelasticity are studied. The velocities of propagating wave surfaces of translational and spinor displacements are found. The relationships between the amplitude factors of a weak discontinuity of the temperature field and the vectors of discontinuities of translational and spinor displacements characterizing the athermal properties of the coupled thermoelastic waves are obtained.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, полуизотропное тело, трансляционное перемещение, спинорное перемещение, продольная волна, поперечная волна, слабый разрыв.

Key words: micropolar thermoelasticity, semi-isotropic solid, translational displacement, spinor displacement, longitudinal wave, transverse wave, weak discontinuity.

Настоящее исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

УДК 539.3

Введение. Проблемы распространяющихся поверхностей слабых разрывов физических полей являются актуальными и давно привлекают внимание исследователей-механиков [1–5]. Однако современные конструкционные био- и метаматериалы обладают сложной микроструктурой, а их определяющие параметры проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трёхмерного пространства [6]. Для моделирования термомеханического отклика таких материалов приходится использовать модели микрополярной термоупругости [1;

7–10]. При исследовании волновых процессов полезной оказывается теория Адамара – Томаса [11], которая успешно применялась при исследовании распространения слабых разрывов трансляционных и спинорных перемещений по изотропным микрополярным средам [12–15].

В настоящей работе особое внимание уделяется процессам распространения атермических волн, т. е. волновых поверхностей, при распространении которых не происходит выделения тепла.

Настоящая статья в основном использует результаты, терминологию и понятия, подробно изложенные в предыдущих публикациях [7–10, 12–15].

Продольные и поперечные волны, распространяющиеся в полуизотропной микрополярной термоупругой среде. Система уравнений в частных производных, справедливая для любой криволинейной системы координат в трёхмерном пространстве, может быть выписана в векторной форме следующим образом [7–10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+c_1)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+2c_1\nabla\times\boldsymbol{\phi}+ \\ +Lc_4'\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+Lc_5'\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}-2\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\theta=\rho G^{-1}\partial^2\mathbf{u}, \\ (1+c_2)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}+(1-c_2+2c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}c_4'\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+ \\ +L^{-1}c_5'\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+L^{-1}c_6'\nabla\times\boldsymbol{\phi}-2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi}-\nabla\times\mathbf{u})-2\beta_*\nabla\theta=\rho\mathcal{J}G^{-1}L^{-2}\partial^2\boldsymbol{\phi}, \\ \nabla\cdot\nabla\theta-C\lambda^{-1}\partial_t\theta-2G\lambda^{-1}\alpha_*\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\cdot\partial_t\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\beta_*\nabla\cdot\partial_t\boldsymbol{\phi}=0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где \mathbf{u} – вектор трансляционных перемещений; $\boldsymbol{\phi}$ – вектор спинорных перемещений; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; L – характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α_* – коэффициент линейного теплового расширения; β_* – коэффициент теплового искажения; ∇ – оператор ковариантного дифференцирования; ∂_t – производная по времени. В (1) реализована следующая замена: $C\theta_0^{-1} \rightarrow C, \lambda\theta_0^{-1} \rightarrow \lambda$.

Система уравнений в частных производных (1), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений \mathbf{u} , вектора спинорных перемещений $\boldsymbol{\phi}$ и инкремента температуры θ , служит основой для изучения сильных и слабых разрывов в микрополярной полуизотропной среде, а также волновых процессов, характеризующихся распространением зеркальных волновых мод трансляционных и спинорных перемещений [16].

Исследуем процессы распространения продольных и поперечных волн в полуизотропной микрополярной термоупругой среде. Заметим, что высшим порядком частных производных в системе уравнений в частных производных (1) является второй. Волновой фронт (волновая поверхность) Σ слабых разрывов трансляционных смещений \mathbf{u} , спинорных смещений $\boldsymbol{\phi}$ и приращения температуры θ распространяется в трёхмерном пространстве с нормальной скоростью V . Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка типа Адамара – Томаса представляются в виде [11]

$$\left\{ \begin{array}{l} [\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{u}] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, \quad [\nabla \otimes \nabla \otimes \boldsymbol{\phi}] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\phi}, \\ [\nabla \otimes \partial_t \mathbf{u}] = -V\mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, \quad [\nabla \otimes \partial_t \boldsymbol{\phi}] = -V\mathbf{n} \otimes \mathbf{S}, \\ [\partial_t^2 \mathbf{u}] = V^2 \mathbf{A}, \quad [\partial_t^2 \boldsymbol{\phi}] = V^2 \mathbf{S}, \quad [\nabla \otimes \nabla \theta] = B\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где квадратные скобки обозначают скачок физического поля при прохождении через поверхность слабого разрыва; $B, \mathbf{A}, \mathbf{S}$ – амплитуды физических полей, определённых на волновой поверхности. Отметим, что следующие условия $B=0, \mathbf{A}=\mathbf{0}, \mathbf{S}=\mathbf{0}$ не могут быть выполнены

одновременно ни в одной точке поверхности, если поверхность является поверхностью слабого разрыва. Подставляя (2) в систему уравнений в частных производных (1), можно получить следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от трансляционных \mathbf{u} , спинорных ϕ перемещений и инкремента температуры θ при переходе через волновую поверхность Σ :

$$\begin{cases} [(1+c_1) - \rho G^{-1}V^2] \mathbf{A} + \left(\frac{1}{1-2\nu} - c_1 \right) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + Lc'_4 \mathbf{S} + Lc'_5 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0, \\ [(1+c_2) - \rho \mathfrak{J}G^{-1}L^2V^2] \mathbf{S} + (1-c_2 + 2c_3) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) + L^{-1}c'_4 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + L^{-1}c'_5 \mathbf{A} = 0, \\ B + 2G\lambda^{-1} \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} V(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + 2G\lambda^{-1}L^2 \beta V(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Векторы поляризации слабых разрывов \mathbf{A} и \mathbf{S} можно аддитивно разложить по проекциям на касательные $\boldsymbol{\tau}$ и нормальные \mathbf{n} направления к волновой поверхности Σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{\perp} \boldsymbol{\tau} + A_{\parallel} \mathbf{n}, & \mathbf{S} &= S_{\perp} \boldsymbol{\tau} + S_{\parallel} \mathbf{n}, \\ A_{\perp} &= \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}, & A_{\parallel} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \\ S_{\perp} &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\tau}, & S_{\parallel} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки представлений (4) в систему (3) и группировки членов, содержащих касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ и нормальный вектор \mathbf{n} , можно получить

$$\begin{cases} [(1+c_1) - \rho G^{-1}V^2] A_{\perp} + Lc'_4 S_{\perp} \boldsymbol{\tau} + \\ + [(2 - \rho G^{-1}V^2 + 2\nu(1-2\nu)^{-1}) A_{\parallel} + L(c'_4 + c'_5) S_{\parallel}] \mathbf{n} = 0, \\ [(1+c_2) - \rho \mathfrak{J}G^{-1}L^2V^2] S_{\perp} + L^{-1}c'_5 A_{\perp} \boldsymbol{\tau} + \\ + [(2 - \rho \mathfrak{J}G^{-1}L^2V^2 + 2c_3) S_{\parallel} + L^{-1}(c'_4 + c'_5) A_{\parallel}] \mathbf{n} = 0, \\ B = -2VG\lambda^{-1} \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} A_{\parallel} - 2VG\lambda^{-1}L^2 \beta S_{\parallel}. \end{cases} \quad (5)$$

В силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} первые два уравнения системы (5) будут справедливы только в случае равенства нулю соответствующих коэффициентов при указанных векторах. Указанное обстоятельство позволяет получить условия распространения поверхностей слабых разрывов в полуизотропном твёрдом теле:

$$\begin{aligned} [(1+c_1) - \rho G^{-1}V^2] A_{\perp} + Lc'_4 S_{\perp} &= 0, \\ [(1+c_2) - \rho \mathfrak{J}G^{-1}L^2V^2] S_{\perp} + L^{-1}c'_5 A_{\perp} &= 0, \\ (2(1-\nu)(1-2\nu)^{-1} - \rho G^{-1}V^2) A_{\parallel} + L(c_4 + c_5) S_{\parallel} &= 0, \\ (2 - \rho \mathfrak{J}G^{-1}L^2V^2 + 2c_3) S_{\parallel} + L^{-1}(c_4 + c_5) A_{\parallel} &= 0, \\ B + V2G\lambda^{-1} \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} A_{\parallel} + V2G\lambda^{-1}L^2 \beta S_{\parallel} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Давайте рассмотрим особо интересные для прикладных задач случаи. Следует отметить, что если при распространении поперечных волн, т. е. когда выполнены условия $A_{\perp} \neq 0$ и/или $S_{\perp} \neq 0$ и одновременно $A_{\parallel} = 0$ и $S_{\parallel} = 0$, то такая волна будет заведомо атермической, что немедленно следует из последнего уравнения в системе (6). Возможные скорости распространения такой поверхности будут равны

$$\sqrt{2} V_{\perp} = \sqrt{v_{\perp}^{\mu 2} + v_{\perp}^{\mu \mu 2} \pm \sqrt{4\rho^{-2}\mathcal{J}^{-1}G^2L^2c_4'c_5' + (v_{\perp}^{\mu 2} - v_{\perp}^{\mu \mu 2})^2}},$$

где использованы обозначения

$$v_{\perp}^{\mu} = \sqrt{\rho^{-1}G(1+c_1)}, \quad v_{\perp}^{\mu \mu} = \sqrt{(\rho\mathcal{J})^{-1}G(1+c_2)}.$$

В случае распространения по полуизотропному микрополярному термоупругому телу продольных волн, т. е. когда выполнены условия $A_{\parallel} \neq 0$ и $S_{\parallel} \neq 0$, условие атермичности таких волн $B = 0$ следует из последнего уравнения в системе (6) и записывается в виде

$$\frac{A_{\parallel}}{S_{\parallel}} = -L^2 \frac{\beta}{\alpha} \frac{1-2\nu}{1+\nu},$$

что накладывает ограничения на соответствующие нормальные проекции векторов поляризации спинорных и трансляционных перемещений к волной поверхности.

Возможные скорости распространения продольных волн будут равны

$$\sqrt{2} V_{\parallel} = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\parallel}^{\mu \mu 2} \pm \sqrt{4(c_4' + c_5')^2 \rho^{-2}\mathcal{J}^{-1}G^2L^2 + (v_{\parallel}^2 - v_{\parallel}^{\mu \mu 2})^2}},$$

где введены обозначения

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{G(2-2\nu)}{\rho(1-2\nu)}}, \quad v_{\parallel}^{\mu} = \sqrt{\frac{G(2-2\nu)}{\rho(1-2\nu)}}.$$

Заключение. В данной работе исследованы процессы распространения связанных слабых разрывов инкремента температуры, трансляционных и спинорных перемещений. Особое внимание уделено условиям атермичности волн, распространяющихся по полуизотропному микрополярному термоупругому континууму. Изучены слабые разрывы решений связанной системы уравнений в частных производных полуизотропной микрополярной термоупругости с применением геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса. Найдены скорости распространяющихся волновых поверхностей трансляционных и спинорных смещений. Получены соотношения между амплитудными факторами слабого разрыва температурного поля и векторами разрывов трансляционных и спинорных перемещений, характеризующих атермические волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nowacki, W. Theory of asymmetric elasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1986. – 383 p.
2. Whitham, G. B. Linear and nonlinear waves. New York: John Wiley & Sons, 2011.
3. Бреховских, Л. М. Введение и механика сплошной среды (в приложении и теории волн) / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
4. Smith, A. C. Elastic wave propagation in noncentrosymmetric, isotropic media: dispersion and field equations. International Journal of Engineering Science. 1967. – Vol. 5. № 10. – P. 741-746.
5. Achenbach, J. D. Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. American Elsevier, Amsterdam, London, New York, 1973.
6. Lakes, R. Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
7. Murashkin, E. V.; Radaev, Y. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. pseudotensor formulation. Mechanics of Solids. – 2023. – Vol. 58. No. 3. – P. 802-813.
8. Мурашкин, Е. В. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 3 (57). – С. 112-128.
9. Мурашкин, Е. В. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 4 (58). – С. 86-120.



10. Murashkin, E. V.; Radayev, Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mechanics of Solids*. – 2023. – Vol. 58, №. 9. – P. 3111-3119.
11. Thomas, T. Y. *Plastic flow and fracture in solids*. New York, London: Academic Press, 1961.
12. Murashkin, E. V.; Radayev, Y. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]* 2014. № 4 (37). P. 85-97.
13. Ковалев, В. А. О слабых разрывах и уравнениях скачков на волновых поверхностях в микрополярных термоупругих континуумах / В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. – 2015. – Т. 15. – Вып. 1. – С. 79-89.
14. Murashkin, E. V.; Radayev, Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity. *Materials Physics and Mechanics*. – 2015. Vol. 23, № 1. P. 10-13.
15. Murashkin, E. V.; Stadnik, N. E. Compatibility conditions in continua with microstructure. *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 95.
16. Мурашкин, Е. В. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах / Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2021. – № 2 (48). – С. 115-127.

Фролов Д. О., Петрова А. Н.
СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К АРХИТЕКТУРЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ РЕЛЕВАНТНОСТИ ПОИСКА В БОЛЬШИХ ОБЪЕМАХ ДАННЫХ

Фролов Д. О., Петрова А. Н.
D. O. Frolov, A. N. Petrova

**СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К АРХИТЕКТУРЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ РЕЛЕВАНТНОСТИ ПОИСКА В БОЛЬШИХ ОБЪЕМАХ ДАННЫХ**

**MODERN APPROACHES TO NEURAL NETWORK ARCHITECTURE TO INCREASE
THE RELEVANCE OF SEARCH IN LARGE DATA VOLUME**

Фролов Дмитрий Олегович – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: optcompanys@mail.ru.

Dmitriy O. Frolov – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: optcompanys@mail.ru.

Петрова Анна Николаевна – кандидат технических наук, заведующая кафедрой «Проектирование, управление и развитие информационных систем» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: PetrovaAN2006@yandex.ru.

Anna N. Petrova – PhD in Engineering, Head of Design, Management and Development of Information Systems Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: PetrovaAN2006@yandex.ru.

Аннотация. В статье исследуются современные нейросетевые архитектуры, направленные на повышение точности поисковых результатов при обработке больших объемов данных. Особое внимание уделяется трансформерам, методам обучения с учителем и без, а также стратегиям оптимизации моделей. Для оценки эффективности этих архитектур был проведен эксперимент, в рамках которого сравнивались различные модели по показателям точности и релевантности, включая BERT, RoBERTa и Longformer. Полученные результаты демонстрируют, что усовершенствованные модели на основе трансформеров обеспечивают значительные улучшения качества поисковых запросов.

Summary. This paper explores modern neural network architectures aimed at improving the accuracy of search results when processing large amounts of data. Particular attention is paid to transformers, supervised and unsupervised learning methods, and model optimization strategies. To evaluate the effectiveness of these architectures, an experiment was conducted in which various models were compared in terms of accuracy and relevance, including BERT, RoBERTa, and Longformer. The results demonstrate that improved transformer-based models provide significant improvements in the quality of search queries.

Ключевые слова: поиск информации, машинное обучение, функция потерь, квантовая информация.

Key words: search for information, machine learning, loss function, quantum information.

УДК 004.41

Введение. Современные поисковые системы, которые обрабатывают большие объемы данных, сталкиваются с трудностью точного извлечения информации. Задача нахождения релевантных данных становится особенно важной для динамических баз данных, где необходимо не только обеспечить высокую точность, но и адаптироваться к предпочтениям пользователей и новым запросам. В данной работе рассматривается, как трансформерные архитектуры и методы их оптимизации могут способствовать улучшению релевантности поиска. В статье также представлен эксперимент, направленный на оценку различных нейросетевых моделей и их влияния на эффективность поиска.

Современные подходы к поиску информации. Трансформеры, такие как BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers) и его усовершенствованная версия RoBERTa (Robustly Optimized BERT Pretraining Approach), являются одними из ключевых прорывов в области обработки естественного языка (NLP) за последние годы. Эти модели значительно

трансформировали традиционные методы анализа и понимания текста, открыв новые возможности для решения разнообразных задач, включая анализ настроений, извлечение информации, машинный перевод и др.

Главной особенностью трансформеров является их способность учитывать контекст запроса на всех уровнях текста. Это особенно важно, поскольку традиционные модели часто не справлялись с улавливанием долгосрочных зависимостей между словами в предложении. Например, если слово в начале текста влияет на значение слова в конце, старые модели не всегда могли отразить такую зависимость. В отличие от них, трансформеры способны учитывать как локальные, так и глобальные зависимости, что обеспечивает более точную интерпретацию смысла текста [1].

Основным элементом, который обеспечивает эффективность трансформеров в решении различных задач, является механизм self-attention (самовнимание). Этот механизм позволяет модели оценивать важность каждого слова в контексте других слов в предложении независимо от их расстояния друг от друга. Он достигается путём вычисления весов внимания для каждой пары слов, что позволяет модели анализировать взаимодействие между всеми словами в предложении при обработке каждого отдельного элемента текста.

BERT использует два основных подхода для обучения: masked language modeling (MLM) и next-sentence prediction (NSP) [10]. В первом случае часть слов в предложении скрывается и модель должна предсказать их, опираясь на контекст. Это позволяет модели учитывать двусторонний контекст, включая как предыдущие, так и последующие слова. Во втором подходе модель обучается предсказывать, будет ли следующее предложение логичным продолжением текущего, что помогает ей учитывать связи между предложениями.

RoBERTa является усовершенствованной версией BERT, которая была оптимизирована с целью повышения эффективности предобучения. Эта модель отличается от BERT более агрессивными подходами к обучению, такими как увеличение объёма данных, расширение длины последовательностей и отказ от задачи NSP, которая показала низкую эффективность в реальных приложениях [2]. Вместо этого RoBERTa сосредотачивается на более глубоком обучении с использованием длинных последовательностей и улучшенных оптимизационных методов, что способствует улучшению производительности модели в различных задачах NLP.

Ключевое преимущество моделей типа BERT и RoBERTa заключается в их способности воспринимать текст как целостную структуру, а не как набор отдельных элементов, что значительно повышает точность и обоснованность выводов. Эти модели стали основой для разработки множества успешных решений, таких как поисковые системы, системы рекомендаций, чат-боты и другие, которые требуют глубокого понимания контекста текста для обеспечения более точных и релевантных откликов. Для задач поиска с заранее размеченными данными часто используется метод обучения с учителем, который включает дообучение моделей, предварительно обученных на больших объёмах данных [8]. В условиях нехватки размеченных данных активно применяется обучение без учителя, включающее методы самообучения, такие как контрастивное обучение и псевдомаркировка. Обучение нейронных сетей можно разделить на два основных подхода: с учителем (supervised learning) и без учителя (unsupervised learning). Эти методы активно применяются для повышения релевантности поиска и оптимизации обработки данных в нейронных сетях, включая трансформерные модели.

Обучение с учителем (Supervised Learning). Обучение с учителем предполагает, что модель обучается на данных, которые уже имеют соответствующие метки (labels). Это означает, что для каждой обучающей выборки известно, какой результат должен быть получен. Модель получает входные данные и их соответствующие ответы, затем обучается минимизировать разницу между предсказанными и реальными метками. Такой подход активно используется для задач ранжирования и оценки релевантности в поисковых системах. Например, если нужно оценить, насколько страница соответствует запросу, модель обучается на большом наборе данных, содержащем различные запросы и их релевантные результаты. На основе этого обучающего материала модель может впоследствии ранжировать новые данные, учитывая релевантность, ориентируясь на примеры из обучающего набора.

Процесс обучения с учителем в трансформерах [7]:

1. Подготовка данных. Составляется набор данных, где для каждого запроса (входного текста) есть несколько меток релевантности (например, документ оценивается по шкале от 1 до 5).
2. Тренировка модели. Модель, например на основе BERT, обрабатывает текст запроса и документа, генерируя представление, которое затем сравнивается с метками.
3. Оптимизация. Ошибки, возникшие из-за несоответствия предсказанных и фактических меток, минимизируются с помощью алгоритмов оптимизации (например, обратного распространения ошибки).
4. Применение. Обученная модель может предсказывать релевантность документов для новых запросов.

Преимущества обучения с учителем:

- высокая точность при наличии качественных данных;
- обучение на конкретных задачах, где метки позволяют модели стать более предсказуемой;
- возможность легко оценить качество модели через метрики, такие как точность и полнота.

Ограничения:

- требуется большое количество размеченных данных, что может быть дорого и трудоёмко;
- модель может быть избыточно специфичной для данных и плохо обобщаться на новые, непривычные случаи.

Обучение без учителя (Unsupervised Learning). Обучение без учителя осуществляется на данных, не содержащих меток или заранее известных ответов. В этом случае модель обучается выявлять скрытые структуры, закономерности и группы данных, опираясь исключительно на их содержание. Модель должна самостоятельно извлекать значимую информацию, например классифицируя схожие тексты или выявляя тематические паттерны. Такой подход широко используется для кластеризации документов и тематического анализа. Это помогает эффективно организовывать данные для упрощения их дальнейшего поиска [3]. Например, модель без учителя может быть обучена на большом наборе данных для создания тематической карты, где она группирует документы по схожести, что впоследствии помогает оптимизировать ранжирование результатов поиска по теме и смысловой близости.

Процесс обучения без учителя в трансформерах [6]:

1. Инициализация данных. Загружается большой объём неразмеченного текста, например набор документов без указания их тем.
2. Выявление закономерностей. Модель, например на основе GPT или BERT, обрабатывает текст, выстраивая внутренние представления слов и фраз, выявляя закономерности (например, темы).
3. Кластеризация. Модель группирует тексты или предложения, выявляя скрытые паттерны или темы.
4. Применение. Результаты могут быть использованы для улучшения рекомендаций или ранжирования документов, чтобы выдавать наиболее подходящие по теме результаты.

Преимущества обучения без учителя:

- отсутствие необходимости в метках позволяет экономить ресурсы на разметке данных;
- модель может выявлять неизвестные ранее категории или темы;
- модель подходит для обработки больших объёмов данных, находя связи и закономерности, которые могут быть неочевидны для человека.

Ограничения:

- полученные результаты могут быть трудно интерпретируемыми, т. к. модель находит закономерности, не всегда соответствующие реальной смысловой структуре данных;
- невозможно оценить точность без меток, что делает анализ качества работы модели субъективным.

Постановка эксперимента. Для исследования методов повышения релевантности поиска с применением современных нейросетевых архитектур был проведён эксперимент, включающий обучение и оценку моделей на реальных поисковых данных. В эксперименте использовались

нейронные сети, основанные на трансформерах, включая стандартные архитектуры, такие как BERT и RoBERTa, а также их модификации, адаптированные для задач поиска. В ходе работы было оценено влияние архитектурных усовершенствований на улучшение релевантности поиска по сравнению с базовой моделью.

Целью эксперимента было определить, какие архитектурные модификации трансформеров способны улучшить релевантность поиска в условиях обработки больших объёмов данных. Мы проводили сравнение производительности моделей, учитывая метрики качества поиска, такие как точность и полнота, на задачах ранжирования и поиска. Для эксперимента был использован датасет MS MARCO – популярный набор данных, включающий запросы и соответствующие релевантные ответы для текстового поиска, что делает его удобным для тестирования моделей ранжирования [4]. В нём содержатся несколько десятков тысяч запросов и ответов, а также оценки релевантности, которые позволили обучать и проверять модели на реальных примерах. Затем была проведена предварительная обработка данных:

- все запросы и тексты были очищены от лишних символов и подготовлены для обработки в виде токенов, которые могли воспринять BERT и его производные. Запросы нормализованы для единообразия;

- был проведён анализ часто встречающихся токенов, который помог улучшить токенизацию.

Для эксперимента были обучены несколько моделей на основе BERT: стандартная версия BERT, RoBERTa и BERT с улучшениями архитектуры, включая более глубокие слои и оптимизированные механизмы внимания. Все модели использовали одинаковый процесс обучения с оптимизацией гиперпараметров для обеспечения стабильности. В процессе эксперимента были применены стандартные метрики для оценки релевантности поиска, такие как MRR (Mean Reciprocal Rank) и NDCG (Normalized Discounted Cumulative Gain), которые были выбраны за их способность точно оценивать релевантность и учитывать аспекты ранжирования [5]. После оценки производительности моделей на основе точности и полноты результаты были систематизированы в табл. 1 для дальнейшего сравнения.

Таблица 1

Оценка производительности моделей

| Модель | MRR@10 | NDCG@10 | Параметры | Обучение, ч |
|---------------------|--------|---------|-----------|-------------|
| BERT-base | 0.26 | 0.53 | 110M | 3 |
| RoBERTa | 0.29 | 0.57 | 125M | 4 |
| BERT с модификацией | 0.32 | 0.59 | 135M | 4.5 |

Из табл. 1 видно, что модель BERT с модификацией показала лучшие результаты из-за более тщательной предобученной архитектуры, что помогло ей более эффективно справляться с задачей поиска.

На рис. 1 изображён график сравнения MRR@10 и NDCG@10.

Модифицированная версия BERT, которая включала дополнительные слои внимания и улучшенные механизмы обработки информации, продемонстрировала лучшие результаты. Её значение метрики NDCG@10 составило 0.59, что свидетельствует о значительном улучшении релевантности результатов по сравнению с базовой моделью.

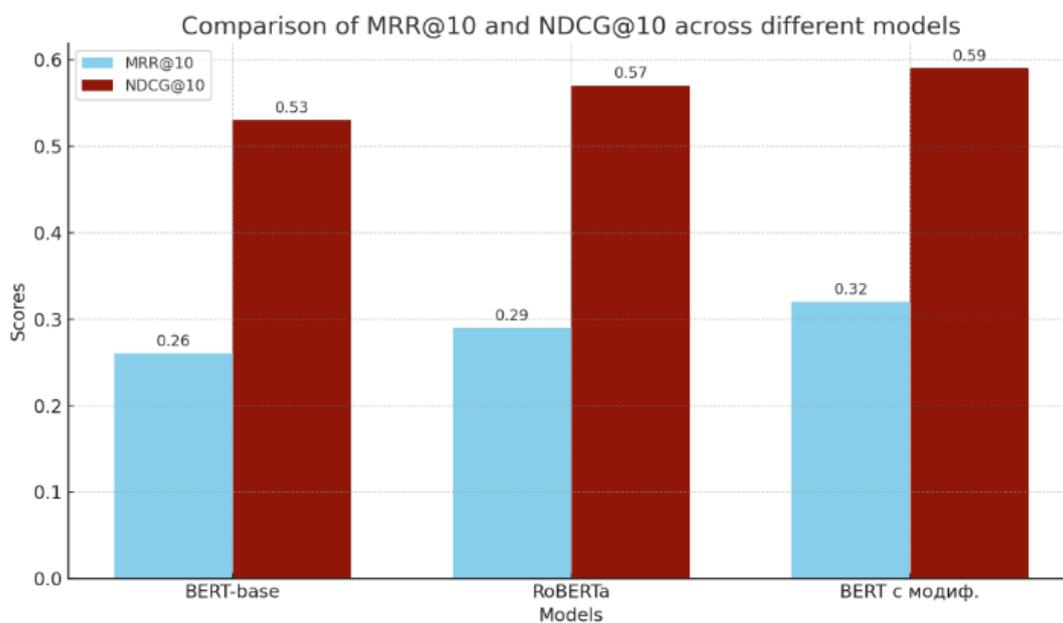


Рис. 1. График сравнения MRR@10 и NDCG@10

Заключение. В ходе исследования были рассмотрены современные подходы к архитектуре нейронных сетей, направленные на улучшение релевантности поиска в больших объёмах данных, с акцентом на трансформеры и их модификации. Проведённый эксперимент подтвердил эффективность улучшений в архитектуре моделей, таких как BERT и RoBERTa, для повышения точности и качества поисковых запросов. Результаты показали, что модели с усовершенствованной архитектурой, включая дополнительные слои внимания и оптимизированные механизмы обработки информации, обеспечивают значительное улучшение релевантности поиска. Экспериментальная оценка моделей, включая стандартный BERT и его модификации, показала, что более глубокие версии и улучшенные механизмы внимания значительно повышают качество поисковых систем, способных обрабатывать сложные запросы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vaswani, A., Shardlow, M., & Parmar, N. (2017). Attention is All You Need. In *Advances in Neural Information Processing Systems*.
2. Devlin, J., Chang, M. W., Lee, K., & Toutanova, K. (2019). BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. In *NAACL-HLT*.
3. Raffel, C., Shinn, C., & Liu, P. J. (2020). Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer. In *Journal of Machine Learning Research*.
4. Liu, Y., Ott, M., Goyal, N., & Zhang, X. (2019). RoBERTa: A Robustly Optimized BERT Pretraining Approach. *arXiv preprint arXiv:1907.11692*.
5. Lan, Z., Chen, M., Goodman, S., & Gimpel, K. (2020). ALBERT: A Lite BERT for Self-supervised Learning of Language Representations. In *International Conference on Learning Representations*.
6. Khashabi, D., et al. (2020). UNIFIEDQA: Crossing Format Boundaries with a Single QA System. In *NeurIPS*.
7. Radford, A., et al. (2021). Learning Transferable Visual Models From Natural Language Supervision. In *International Conference on Machine Learning*.
8. Beltagy, I., Lo, K., & Cohan, A. (2020). SciBERT: A Pretrained Language Model for Scientific Text. In *Proceedings of the 2019 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics*.
9. Zaheer, M., Ruochen, H., & Ranganath, R. (2020). Deep Sets. In *Advances in Neural Information Processing Systems*.
10. Zhang, Y., & Wallace, B. (2019). A Sensitivity Analysis of (and Practitioners' Guide to) Convolutional Neural Networks for Sentence Classification. In *Proceedings of the 2015 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*.



Чехонин К. А.
K. A. Chekhonin

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛАЗЕРНЫХ АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

MODELING OF RESIDUAL STRESSES IN LASER ADDITIVE TECHNOLOGIES

Чехонин Константин Александрович – доктор физико-математических наук, руководитель ХО ИПМ ДВО РАН (Россия, Хабаровск); 680038, г. Хабаровск, ул. Серышева, 60, оф. 312. E-mail: lex7861@rambler.ru.
Konstantin A. Chekhonin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Khabarovsk Division (Russia, Khabarovsk); off. 312, 60 Seryshev St., Khabarovsk, 680038. E-mail: lex7861@rambler.ru.

Аннотация. Рассматривается быстропротекающий трёхмерный процесс консолидации слоя металла, полученного при реализации аддитивной технологии путём прямой подачи порошка и энергии лазера. В основу математической модели положены уравнения равновесия с вязкоупругопластической реологической моделью. Учитывается влияние температуры и фазового состояния среды на её физико-механические и теплофизические свойства. Численное решение задачи производится методом конечных элементов с использованием адаптивного алгоритма построения сеточной области. Показано влияние технологических режимов (мощности лазера, скорости сканирования) на эволюцию технологических напряжений в наращиваемом слое металла.

Summary. The paper considers a fast three-dimensional process of consolidation of a metal layer obtained by implementing additive technology by direct supply of powder and laser energy. The mathematical model is based on equilibrium equations with a viscous-elastoplastic rheological model. The influence of temperature and phase state of the medium on its physical, mechanical and thermal properties is taken into account. The numerical solution of the problem is performed by the finite element method using an adaptive algorithm for constructing a grid domain. The influence of process modes (laser power, scanning speed) on the evolution of process stresses in the growing metal layer is shown.

Ключевые слова: метод конечных элементов, лазерные аддитивные технологии, затвердевание металла, вязкость, упругопластичность, остаточные напряжения.

Key words: finite element method, laser additive technology, metal solidification, viscosity, elastic-plasticity, residual stress.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00).

УДК 532.2

Введение. В лазерном аддитивном производстве металлоизделий определение остаточных напряжений необходимо для достижения точности размеров выращиваемого изделия (коробление), предотвращения преждевременного усталостного его разрушения и расслоения [1; 2]. Поскольку на аддитивный процесс наращивания влияет более 70 параметров [2], экспериментальные исследования по определению остаточных напряжений требуют много времени и средств. Более того, экспериментальные измерения зависят от формы и размера изделия, уровня и эволюции измеренных напряжений, подготовки образцов к измерению и точности измерения методами рентгеновской или нейтронной дифракции. В этих условиях математическое моделирование термомеханических процессов при затвердевании металла в технологиях аддитивного производства изделий имеет большое значение и является менее затратным методом исследования с большей информативностью [1; 2]. Процесс аддитивного производства включает нагрев, плавление и затвердевание расплава в условиях движущегося лазерного источника энергии с послойным выращива-

нием изделия. В результате этого различные области заготовки подвергаются повторному нагреву и охлаждению [2]. Пространственно-временные температурные циклы сопровождаются аккумуляцией введённого от лазерного источника тепла и развитием остаточных напряжений и деформаций, приводящих к возможному образованию дефектов (трещины, расслоения, коробление и т. д.) [1–3].

Однако и математическая формализация лазерного аддитивного наращивания сопряжена с большими трудностями [2]. При затвердевании металла в нём протекают сложнейшие физические, диффузионные, химические, металлургические и микроструктурные процессы. Фазовый переход в материале сопровождается большими градиентами температур (до $G = 14$ град/мкм) и определяет уровень и эволюцию технологических напряжений. Их значения могут превысить предел набранной прочности материала, что приводит к образованию микротрещин, вплоть до образования магистральных. Высокая скорость охлаждения ($10^3 \dots 10^6$ град/с) определяет формирующуюся морфологию и микроструктуру материала (например, размер и ориентацию зёрен), а следовательно, и его физико-механические свойства.

Кроме этого, фазовый переход в металлах представляет собой сильный релаксационный процесс. Считается [2], что в интервале температур $\Delta T = (T_m - 0,8T_m)$ в окрестности температуры плавления в затвердевающем металле преобладают вязкоупругие свойства. В дальнейшем, в процессе охлаждения материала и микроструктурных изменений, его реологические свойства представляются в виде упругопластических моделей [2] с зависящими от температуры физико-механическими свойствами. С теоретической точки зрения рассматриваемую задачу можно отнести к механике растущих тел [4; 5]. В этих условиях аналитическое решение рассматриваемой задачи удаётся получить в крайне упрощённых постановках [4–6].

Одна из первых работ, посвящённых построению определяющих соотношений при затвердевании металлов с упругопластической реологией применительно к аддитивным технологиям, выполнена Линдгреном [7]. В работе [8] представлено численное решение рассматриваемой задачи в упрощённой упругой постановке с использованием метода конечных разностей. Показано, что продольные остаточные напряжения (по направлению сканирования), возникающие в формируемом металлическом слое, в два раза превышают поперечные.

В работах [9–16] рассматривается математическое моделирование отверждения вязкоупругого материала с использованием метода конечных элементов. В рамках двухкомпонентной среды на основе феноменологического подхода разработана система определяющих уравнений, описывающих термомеханическое поведение материала в условиях затвердевания. Модель предназначена для описания напряжённо-деформированного состояния в температурном диапазоне, охватывающем интервалы реализации фазовых и релаксационных переходов при конечных деформациях. Основные уравнения термомеханохимии оказываются связанными с взаимным влиянием напряжённо-деформированного состояния отверждаемого материала и кинетики отверждения. В настоящей работе развивается этот подход для математического моделирования остаточных напряжений, возникающих при затвердевании вязкоупругопластического слоя металла. Разработанная математическая модель используется для анализа влияния режимов 3D-печати в прямых лазерных технологиях на напряжённо-деформированное состояние наращиваемого слоя металла. Эволюцию распределения температуры в слое и его геометрии получаем из результатов численного моделирования гидродинамической стадии наращивания [17; 18].

Постановка задачи. Лазерное наращивание слоя с использованием аддитивной технологии представляет собой сложный быстропротекающий физический процесс, включающий в себя явления конвективного теплопереноса, термодиффузии, прироста массы путём струйной подачи порошка потоком инертного газа, сопровождаемые фазовым переходом плавления при воздействии лазерным излучением с последующим затвердеванием остывающей ванны расплава. В начальный момент времени предполагаем плоскость поверхности подложки (см. рис. 1) плоской с начальной температурой подогрева. При включении лазера рабочая поверхность подложки начинает плавиться с образованием расплавленной ванночки в форме параболоида. В неё с характер-

ным временем запаздывания, вызванного полётом частиц от сопла до поверхности подложки, начинает постоянно добавляться поток массы порошка. В результате на поверхности подложки формируется металлический слой (см. рис. 1).

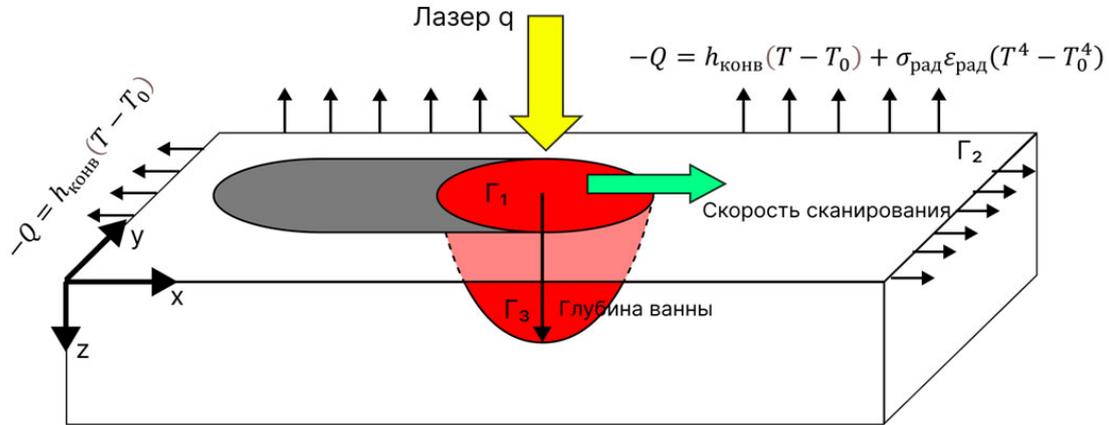


Рис. 1. Расчётная область

Математическая модель гидродинамической стадии тепломассопереноса в ванне расплава с реализацией численного алгоритма приведена в работах [17; 18]. Путём её численного решения получаем эволюцию температурного поля и профиля наращиваемого металлического слоя. Эти данные являются начальными условиями рассматриваемой термомеханической задачи. Считаем, что все физико-механические параметры материала (модуль сдвига, объёмный модуль, предел текучести, вязкость и т. д.), определяющие его упругие, вязкие и пластические свойства, зависят от фазового состояния, температуры и приведены на рис. 2.

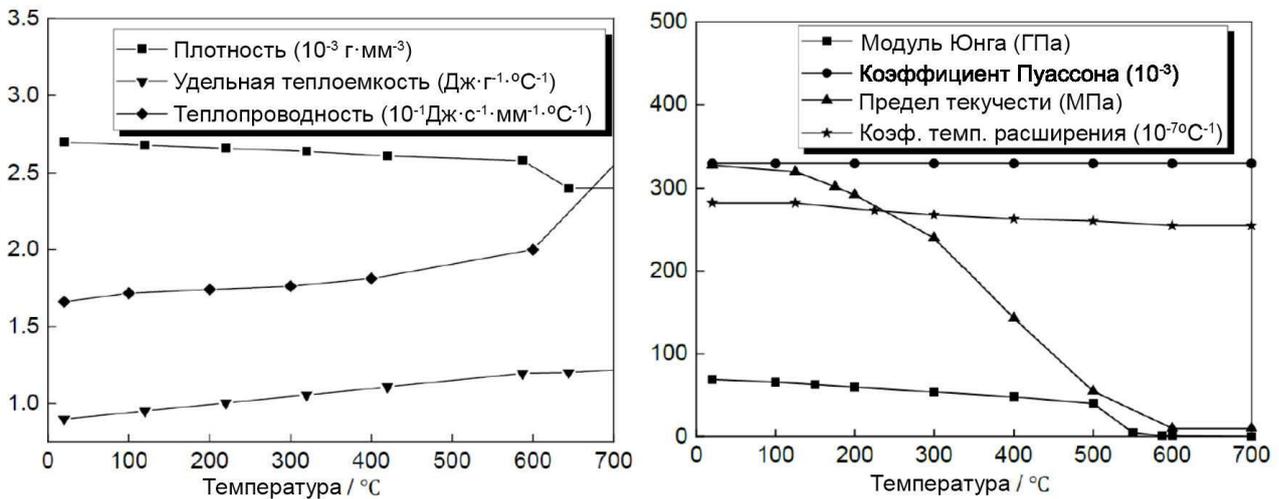


Рис. 2. Зависимость свойств материала от температуры

Таким образом, с учётом сделанных предположений термомеханическая задача определения остаточных напряжений при известном распределении температурного поля $T = T(t, x, y, z)$ в расчётной области (см. рис. 1) будет заключаться в определении вектора перемещений \vec{u} и гидростатического давления p , удовлетворяющих уравнениям равновесия:

$$\nabla \cdot \sigma + \vec{b} = 0$$

с условием связи

$$\left(\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} - e^T\right) - \frac{p}{K} = 0,$$

где $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} + \mathbf{s}(\bar{\boldsymbol{u}})$ – полный тензор напряжений, здесь \mathbf{s} – девиатор тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$; $\bar{\boldsymbol{b}}$ – вектор объёмных сил; $K(T)$ – объёмный модуль упругости.

Объёмные деформации включают в себя деформации теплового расширения и структурной усадки [15; 16]:

$$e^T(T, f_s) = e^{\text{расшир}}(T) + e^{\text{структ}}(f_s),$$

$$e^{\text{расшир}}(T) = \alpha(T)(T - T_0),$$

$$e^{\text{структ}}(f_s) = \beta f_s,$$

где $f_s = (1 - f_l)$ – доля твёрдой фазы в расплаве, здесь f_l – относительное содержание жидкой фазы; $\alpha = \alpha(T)$ – объёмный коэффициент теплового расширения; $\beta = \frac{\Delta V^{pc}}{V_0}$ – параметр структурной

усадки, здесь V_0 – начальный объём; ΔV^{pc} – изменения объёма за счёт структурной усадки,

$$f_l = \begin{cases} 0, & T < T_s \\ \frac{T - T_l}{T_l - T_s}, & T_s < T < T_l \\ 1, & T > T_l \end{cases}$$

$$T \in [T_s, T_l].$$

Для определения пластических деформаций используем ассоциированное правило течения:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \sigma_y f_s \leq 0,$$

где $\sigma_y(T)$ – предел текучести.

В качестве реологического уравнения затвердевающего расплава металла принимаем модель Шведова – Бингама:

$$e^p \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \sigma_y f_s \right\rangle,$$

где $\eta(T)$ – пластическая вязкость; $\|\bullet\|$ – норма Фробениуса; $\langle \bullet \rangle$ – скобки Макалея.

Моделирование производим с граничными условиями, приведёнными на рис. 1, и отсутствием крепления подложки.

Следует отметить: приведённая выше математическая модель позволяет проводить моделирование от фазового состояния вязкой несжимаемой жидкости до условий полного затвердевания и охлаждения слоя.

Результаты расчётов. Численное решение приведённой термомеханической задачи производим с использованием метода смешанных конечных элементов с выбором аппроксимирующего базиса полей перемещения и гидростатического давления, удовлетворяющего LBB-условию [19].

Лазер с варьируемой интенсивностью излучения $E_s = 60 \dots 80$ Дж/мм² сканирует подложку (см. рис. 1) размером 60x10x10 мм со скоростью $V_{ск} = 6 \dots 10$ мм/с при массовом расходе порошка $M = 4 \dots 8$ г/мин. Теплофизические свойства материалов порошка и подложки приведены на рис. 2.

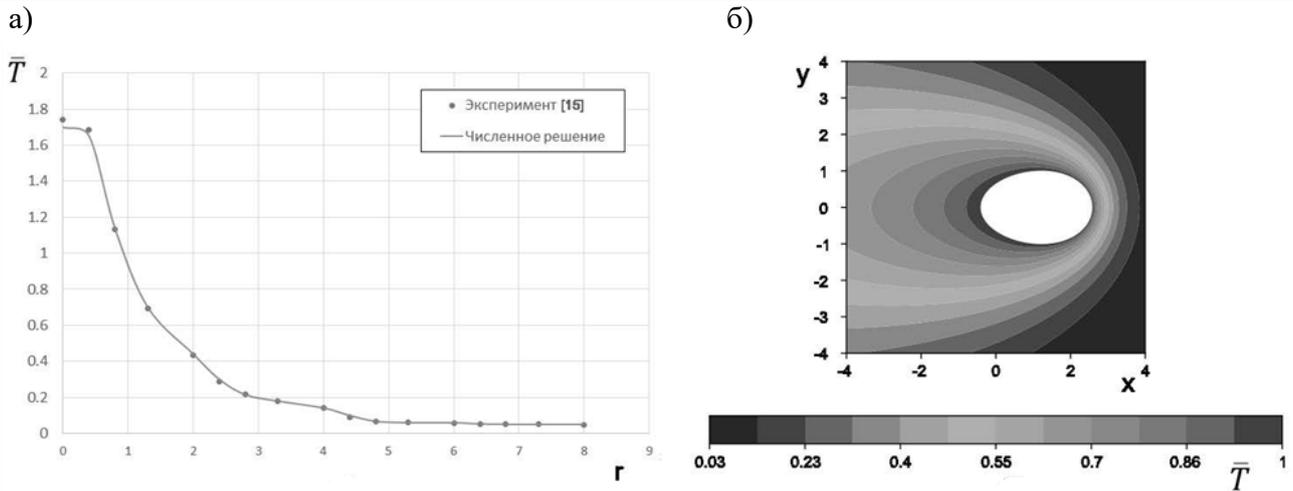


Рис. 3. Распределение безразмерной температуры, отнесённой к температуре плавления, в окрестности лазерного источника (а) и распределение нормализованной температуры в сечении Oxy (б) на рис. 1. Белым цветом выделена ванна с расплавом ($T > T_m$)

На рис. 3 иллюстрируется распределение безразмерной температуры (нормализованной температурой плавления) в окрестности области воздействия лазерного луча в условиях установления режима тепломассопереноса в ванне с расплавом [18]. Сравнение результатов численного расчёта с экспериментом свидетельствует об адекватности математической модели [15]. Ввиду больших градиентов температуры в области затвердевания расплава конечно-элементная сетка адаптируется к решению с её измельчением в зонах максимальных градиентов (см. рис. 4).

Пространственно-временные изменения профилей расплавленной ванны и формируемого слоя металла при лазерном направленном энергетическом наращивании [17; 18] в значительной степени влияют на эволюцию технологических напряжений и образование дефектов 3D-печати. Более того, они оказывают решающее влияние на геометрическую целостность наращиваемого слоя (эффект баллинга, отсутствие адгезии с подложкой и т. д.). На рис. 5 приведена эволюция геометрии ванны с расплавом и наращиваемого слоя. Из результатов расчётов следует, что в процессе наращивания геометрия ванны расплава и формируемого слоя приобретает квази-установившееся состояние.

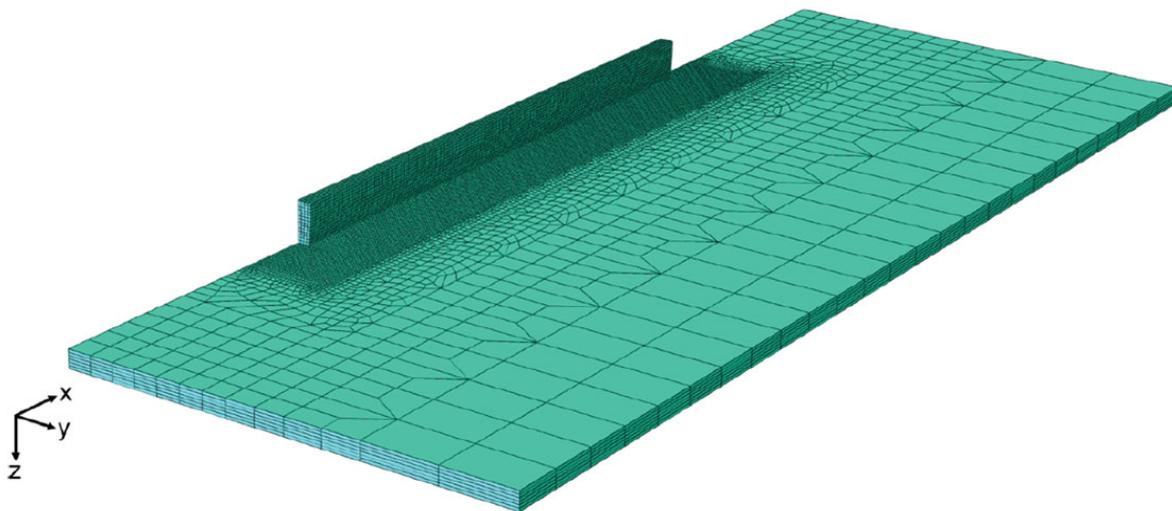


Рис. 4. Конечно-элементная сетка расчётной области с адаптацией

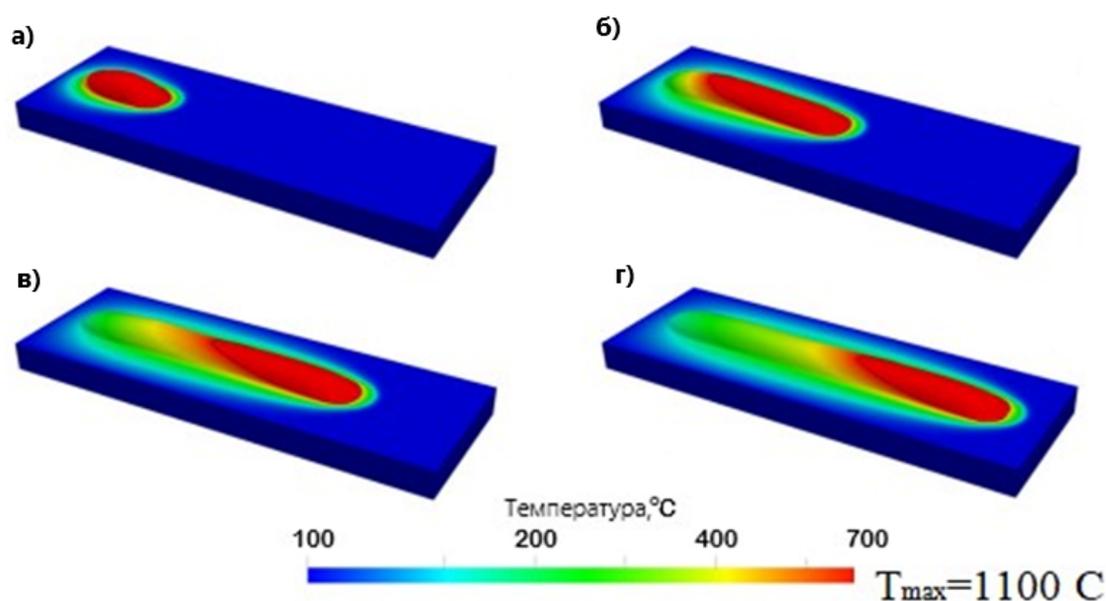


Рис. 5. Эволюция температуры и геометрии ванны с наращиваемым слоем

При охлаждении слоя до комнатной температуры в нём возникают остаточные напряжения и деформации. Распределение продольных и поперечных напряжений в системе слой-подложка приведено на рис. 6. Из результатов численных расчётов следует, что в слое формируются растягивающие напряжения, а в подложке – сжимающие. При этом уровень поперечных напряжений в слое ниже продольных.

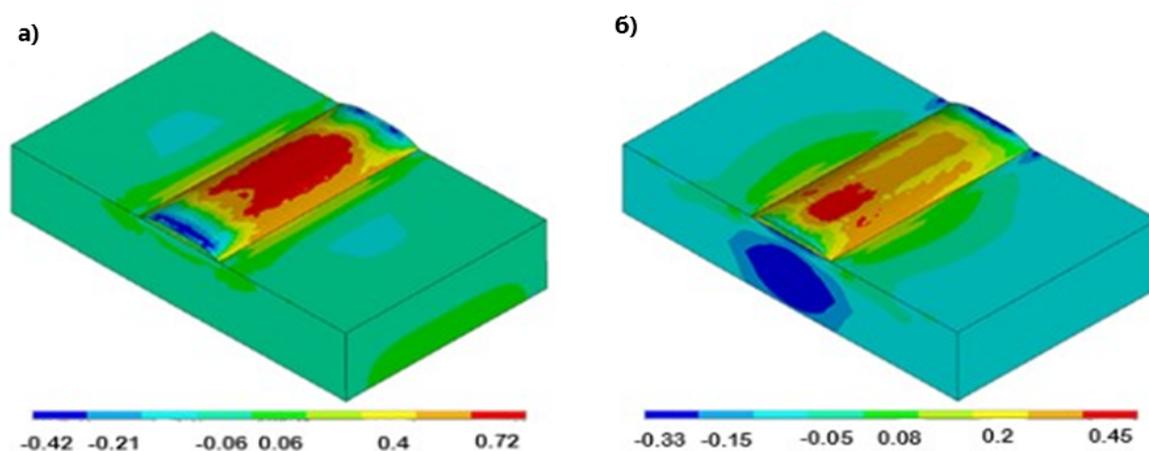
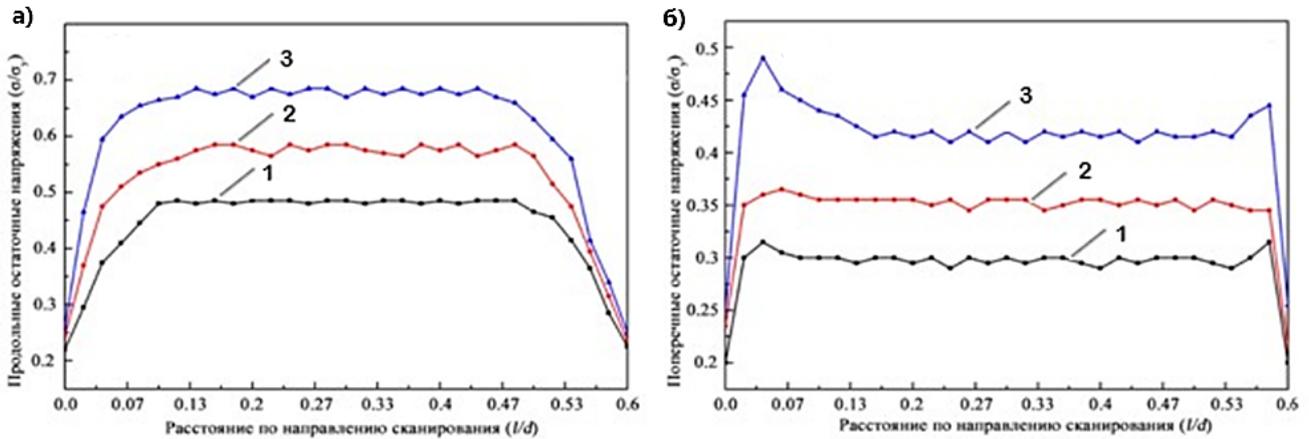


Рис. 6. Распределение нормализованных к пределу текучести $\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)$ остаточных продольных (а) и поперечных (б) напряжений

При заданном массовом расходе порошка наибольшее влияние на уровень остаточных напряжений оказывают технологические режимы процесса наращивания слоя – мощность лазера и скорость сканирования. На рис. 7 иллюстрируется распределение остаточных напряжений на поверхности слоя в функции от интенсивности излучения лазерного источника. Расчёт производим при постоянной скорости сканирования. Из результатов расчёта следует, что увеличение мощности лазерного источника приводит к росту продольных и поперечных

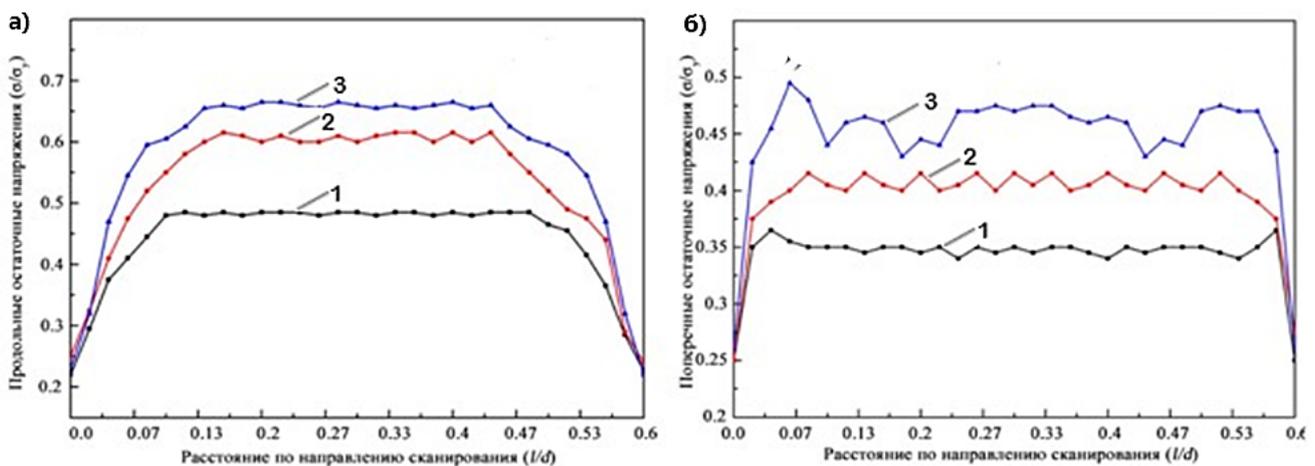
остаточных напряжений (см. рис. 7). Уровень поперечных остаточных напряжений (см. рис. 7, б) в 1,6 раз меньше, что согласуется с известными численными и экспериментальными исследованиями [2].



1 – $E_s = 60$ Дж/мм²; 2 – $E_s = 70$ Дж/мм²; 3 – $E_s = 80$ Дж/мм²

Рис. 7. Распределение нормализованных остаточных напряжений в функции от интенсивности лазерного излучения: а – продольные остаточные напряжения; б – поперечные остаточные напряжения

На рис. 8 показано распределение остаточных напряжений в функции от скорости сканирования лазерным источником поверхности подложки при постоянной его интенсивности излучения. Из результатов расчёта следует, что увеличение скорости сканирования также приводит к росту величины продольных (см. рис. 8, а) и поперечных (см. рис. 8, б) остаточных напряжений. Это связано с ростом градиента температуры в наращиваемом слое.



1 – $V_{ск} = 400$ мм/мин; 2 – $V_{ск} = 500$ мм/мин; 3 – $V_{ск} = 600$ мм/мин

Рис. 8. Распределение нормализованных $\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)$ остаточных напряжений в функции от скорости сканирования: а – продольные остаточные напряжения, б – поперечные остаточные напряжения

Закключение. Рассмотрен быстропотекающий трёхмерный процесс консолидации наращивания слоя металла с использованием прямой подачи порошка и энергии лазера. Моделирование уровня возникающих технологических напряжений проведено с учётом эволюции температурного

поля в ванне с расплавом. Достоинством предложенных определяющих соотношений в термомеханической модели является описание непрерывности в эволюции напряжённо-деформированного состояния в условиях фазового перехода расплава (от вязкой несжимаемой жидкости до затвердевающего слоя с упругопластической реологией). Предложен устойчивый численный алгоритм решения задачи с использованием метода смешанных конечных элементов. Показано влияние мощности лазерного источника энергии и скорости сканирования им поверхности подложки на уровень остаточных технологических напряжений в системе подложка-слой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аддитивные технологии. Материалы и технологические процессы: моногр. / А. И. Рудской [и др.]. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. – 516 с.
2. Mukherjee T., DebRoy T., Theory and Practice of Additive Manufacturing 1st Edition, Wiley, 2023, 522 p.
3. Liu T. S., Chen P., Qiu F., Yang H., Tan N. Y. J., Chew Y., Wang D., Li R., Jiang Q.-C., Tan Ch., Review on laser directed energy deposited aluminum alloys, International Journal of Extreme Manufacturing, 6:2, (2024), 022004.
4. Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи механики растущих тел / Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров, В. Э. Наумов. – М.: Наука, 1991. – 176 с.
5. Арутюнян, Н. Х. Механика растущих вязкоупругопластических тел / Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Э. Наумов. – М.: Наука, 1987. – 471 с.
6. Mercelis, P., Kruth, J-P. Residual stresses in selective laser sintering and selective laser melting. Rapid Prototyping Journal 12/5 (2006) 254-265.
7. Lindgren, L.E. Finite Element Modeling and simulation of Welding. Part 1: Increased Complexity // Journal of Thermal Stresses, 24:2, 141-192.
8. Gusarov, V., Pavlov, M., Smurov, I. Residual Stresses at Laser Surface Remelting and Additive Manufacturing, Physics Procedia, 12, (2011), 248-254.
9. Chekhonin, K. A., Vlasenko, V. D. Numerical Modeling of Compression Cure High-Filled Polymer Material, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 14:6, (2021), 805-814.
10. Чехонин, К. А. О термодинамической согласованности связанной модели отверждения эластомера при конечных деформациях / К. А. Чехонин // Дальневосточный математический журнал. – 2022. – Т. 22. – № 1. – С. 107-118.
11. Чехонин, К. А. Микромеханическая модель высокоэнергетического материала при отверждении / К. А. Чехонин // Дальневосточный математический журнал. – 2022. – Т. 22. – № 1. – С. 119-124.
12. Chekhonin, K. A., Vlasenko, V. D. Multiscale modeling of the effect of curing stresses on the deformation properties and damageability of high-energy materials // AIP Conference Proceedings. – 2023. – V. 2504. – № 020001.
13. Чехонин, К. А. Градиентный алгоритм оптимизации температурно-конверсионной задачи при отверждении высоконаполненных полимерных материалов / К. А. Чехонин, В. Д. Власенко // Информатика и системы управления. – 2019. – № 4. – С. 58-70.
14. Bulgakov, V. K., Chekhonin, K. A. Modeling of a 3D Problem of compression forming system «Composite shell – low compressible consolidating Filler», J. Mathematical Modeling, 4 (2002), 121-131.
15. Гриценко, А. А. Численное моделирование остаточных напряжений в формируемом металлическом слое с использованием подвижного лазерного источника энергии / А. А. Гриценко, К. А. Чехонин // Дальневосточный математический журнал. – 2024. – Т. 23. – № 1. – С. 22-32.
16. Chekhonin, K. A. Current state and development of the theory of curing high-energy composite polymer materials // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2024. – Т. 17. – № 1. – С. 106-114.
17. Белозеров, Н. И. Роль поверхностного натяжения и смачивания расплава металла на твёрдой поверхности подложки при выращивании тонкостенных конструкций путём подачи лазерной энергии и порошка / Н. И. Белозеров, К. А. Чехонин // Дальневосточный математический журнал. – 2024. – Т. 23. – № 2. – С. 157-169.
18. Белозеров, Н. И. Трёхмерное конечно-элементное моделирование течения расплава металла со свободной поверхностью в условиях движущегося лазерного источника / Н. И. Белозеров, К. А. Чехонин // Дальневосточный математический журнал. – 2024. – Т. 23. – № 1. – С. 9-21.
19. Булгаков, В. К. Основы теории метода смешанных конечных элементов / В. К. Булгаков, К. А. Чехонин. – Хабаровск: Изд-во Хабаровского политехнического института, 1999. – 283 с.



Ткаченко П. Г., Котляров В. П.
P. G. Tkachenko, V. P. Kotlyarov

АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКРАНОПЛАНА И САМОЛЁТА КАК ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

ANALYSIS OF THE COMPARATIVE CHARACTERISTICS OF AN EKRAANOPLAN AND AN AIRPLANE AS A MEANS OF TRANSPORTATION

Ткаченко Павел Григорьевич – кандидат технических наук, ведущий конструктор АО «Компания «Сухой» (Россия, Москва).

Pavel G. Tkachenko – PhD in Engineering, Lead Designer of JSC Sukhoi Company (Russia, Moscow).

Котляров Валерий Петрович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Проектирование, управление и разработка информационных систем» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре).

Valery P. Kotlyarov – PhD in Engineering, Associate Professor, Design, Management and Development of Information Systems Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur).

Аннотация. В статье проведено исследование возможных массогабаритных параметров экраноплана, экономически выгодных в сравнении с самолётом при использовании в качестве транспортного средства. Для проведения анализа обработаны статистические данные по продувочным моделям экраноплана и получена зависимость максимального аэродинамического качества экраноплана в зависимости от относительной высоты полёта. В качестве критерия сравнения экраноплана с самолётом в статье применяется удельный километровый расход топлива по отношению к взлётной массе. В статье приведены результаты расчёта массогабаритных характеристик экраноплана и выгодных экономических зон эксплуатации экраноплана в сравнении с самолётом.

Summary. The article examines the possible mass-dimensional parameters of an ekranoplan, which are economically advantageous when compared to an airplane as a mode of transportation. To conduct the analysis, the statistical data on the test models of the ekranoplan were processed, and the dependence of the maximum aerodynamic efficiency of the ekranoplan on the relative height was obtained. As a criterion for comparison between an ekranoplan and an airplane, the specific fuel consumption per kilometer in relation to the take-off weight is used. The article also presents the results of calculations for the mass-dimensional characteristics of the ekranoplan and the economically advantageous operating zones for the ekranoplan compared to aircraft.

Ключевые слова: экраноплан, самолёт, аэродинамическое качество, относительная высота полёта, удельный километровый расход топлива.

Key words: ekranoplan, airplane, aerodynamic efficiency, relative altitude, specific fuel consumption per kilometer.

УДК 629.7.01

Введение. Возникающий интерес к экранопланам как к своеобразным транспортным средствам объясняется их высоким аэродинамическим качеством на малых высотах полёта. Благодаря околоскранным эффектам ожидаются впечатляющие показатели транспортной эффективности. Цель статьи – определить такие массогабаритные параметры экраноплана, при которых его эффективность будет выше, чем у самолёта аналогичной массы.

Анализ аэродинамических характеристик экраноплана. Эффективность экраноплана как транспортного средства следует оценивать по авиационным стандартам, ведь он, как и самолёт, подчиняется законам аэродинамики. Главное достоинство экраноплана – значительное увеличение аэродинамического качества при сопоставимых скоростях. Проведём анализ экспериментальных данных о максимальном аэродинамическом качестве крыла с концевыми шайбами, полу-

ченных в аэродинамических трубах. Зависимость максимального качества от относительной высоты полёта для различных удлинений крыла представлена на рис. 1. Относительная высота полёта определяется следующим образом:

$$\bar{h} = \frac{h}{b},$$

где h – зазор между задней кромкой крыла; b – хорда крыла.

Данные из разных источников показывают значительные расхождения, что обусловлено отличиями в условиях испытаний, точности измерений и качества изготовленных моделей. Поэтому для крыла с удлинением $\lambda = 1$ принято осреднённое значение максимального аэродинамического качества. Рассмотрим, как максимальное аэродинамическое качество экраноплана определяется экспериментальными данными для крыла с шайбами.

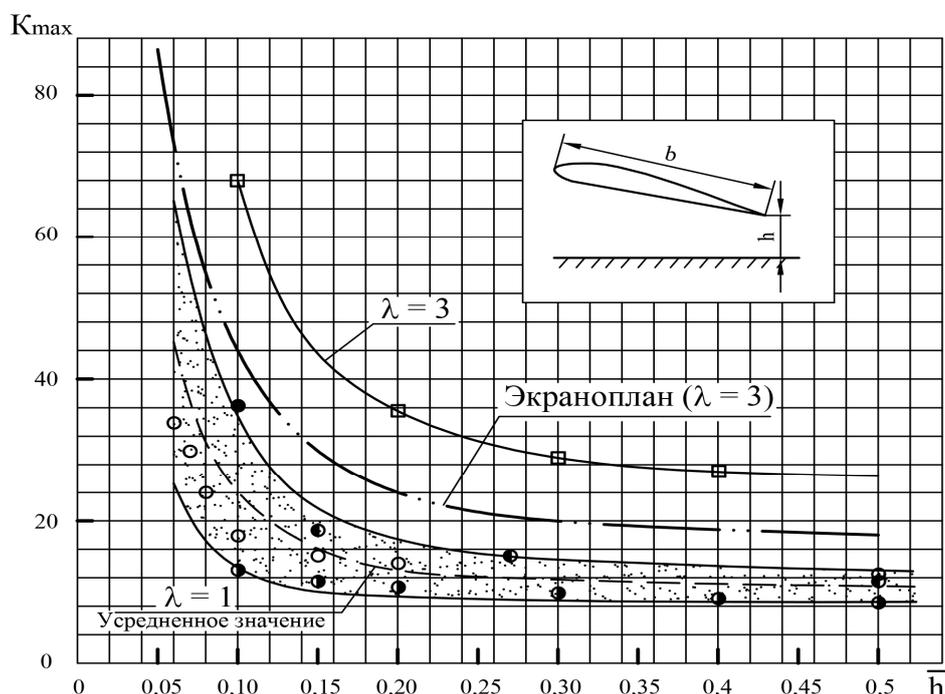


Рис. 1. Зависимость максимального аэродинамического качества крыла с шайбами и экраноплана от относительной высоты полёта (для $\lambda = 1$ дано поле значений из разных источников):

□, ● – источник [1]; ● – источник [2]; ○ – источник [3]; ● – источник [4]

Для большинства реальных экранопланов и проектов удлинение крыла находится в диапазоне $\lambda = 2,5 \dots 3,5$ (например, Орлёнок – 3,26, Липпиш X-113 – 2,67, Иволга-2 – 3,12). В качестве расчётного удлинения принимаем удлинение крыла $\lambda = 3$.

Оценим, какое максимальное аэродинамическое качество можно достичь для всего экраноплана, используя экспериментальные данные для крыла с шайбами, представленные на рис. 1. Принято считать, что вредное аэродинамическое сопротивление крыла с шайбами составляет примерно 50...60 % от общего сопротивления экраноплана [5], если не учитывать дополнительное сопротивление, вызванное эксплуатацией в морских условиях.

Эксплуатация на водной акватории включает в себя особенности конструкции днища основных поплавков, такие как реданы и продольная и поперечная килеватость, а также дополнительные элементы, обеспечивающие причаливание и выход на берег. Эти конструктивные элементы могут увеличить вредное сопротивление ещё на 10...15 % относительно сопротивления крыла.

Таким образом, сопротивление экраноплана может возрасти до 2,1 раза по сравнению с чистым крылом с шайбами. Это объясняется следующим образом: 50 % составляет сопротивление крыла с шайбами, 50 % – сопротивление остальных частей (фюзеляж, поплавки, оперение и т. д.), и ещё 5 % добавляет эксплуатация в морских условиях.

Известно, что при квадратичной поляре максимальное аэродинамическое качество крыла с шайбами можно определить по формуле [5]

$$K_{\max \text{кр}} = 0,5 * \sqrt{\frac{\pi * \lambda}{c_{x0\text{кр}}}}, \quad (1)$$

где λ – геометрическое удлинение крыла; $c_{x0\text{кр}}$ – коэффициент вредного сопротивления крыла с шайбами.

Для экраноплана коэффициент вредного сопротивления увеличивается в 2,1 раза:

$$c_{x0\text{эк}} = 2,1c_{x0\text{кр}}.$$

Подставим это выражение в формулу (1) и получим

$$K_{\max \text{эк}} = 0,5 * \sqrt{\frac{\pi * \lambda}{2,1 * c_{x0\text{кр}}}} = 0,69 * K_{\max \text{кр}}.$$

Таким образом определяется максимальное аэродинамическое качество экраноплана с удлинением крыла $\lambda = 3$ при различных относительных расстояниях от экрана (см. рис. 1).

Сравнительная оценка транспортной эффективности экраноплана и самолёта. Оценим эффективность экраноплана, игнорируя влияние экрана. Отметим важные различия экраноплана и самолёта:

1. Самолёты летают на высоте $H = 11$ км, а экранопланы – на высоте $H = 0$.
2. У экрана возникает дополнительное сопротивление, трудно поддающееся оценке.

Анализ показывает, что экраноплан должен иметь на 38...40 % большее максимальное аэродинамическое качество по сравнению с самолётом на высоте $H = 11$ км, чтобы сравняться с ним по транспортной (топливной) эффективности.

Как видим, главным фактором, определяющим транспортную эффективность летательного аппарата по показателю «удельный километровый расход топлива» является не максимальное аэродинамическое качество K_{\max} , а произведение – максимальное качество на скорость ($K_{\max} * V$).

Определение транспортной эффективности экраноплана по критерию удельного километрового расхода. Оценим транспортную эффективность экраноплана при разных относительных высотах полёта. В расчётах задаёмся абсолютной высотой по задней кромке крыла и изменяем относительную высоту, варьируя среднюю аэродинамическую хорду. Максимальная относительная высота ограничена $h^- = 0,15$, т. к. на больших относительных высотах влияние экрана незначительно. Диапазон исследуемых высот: $h^- = 0,05...0,15$.

Изменение взлётной массы экраноплана, при которой можно реализовать эффективные относительные высоты полёта, обеспечивающие достаточно высокое аэродинамическое качество, показано на рис. 2. На высоте 3...6 м требуемая взлётная масса может достигать 10 000 т, что пока нереализуемо на текущем уровне развития технологий. Однако на малой высоте полёта (около 2 м) требуемая взлётная масса экраноплана имеет приемлемые величины.

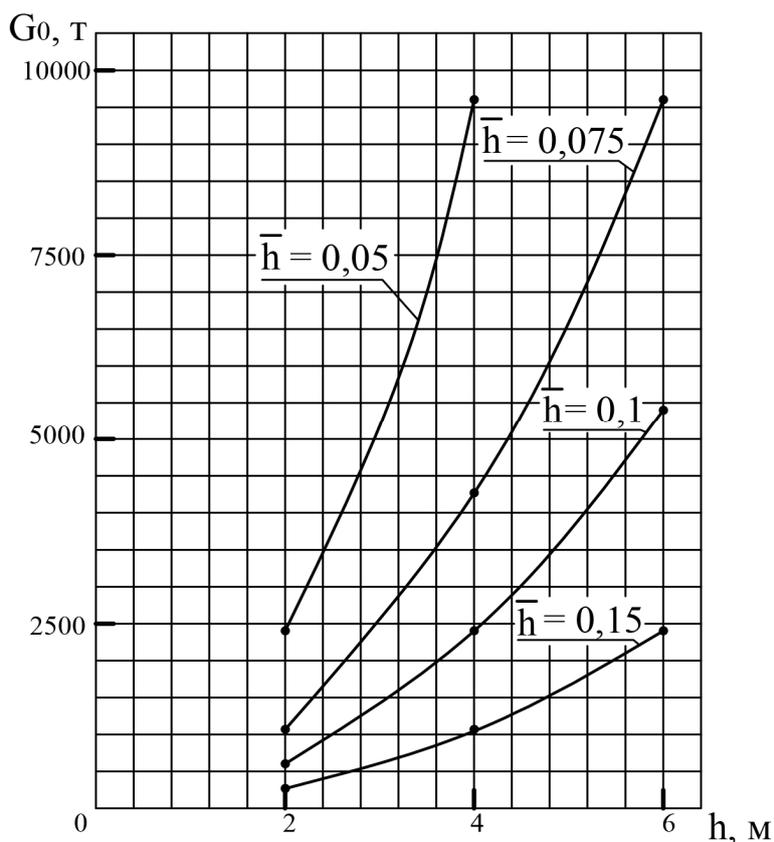


Рис. 2. Взлётная масса экраноплана в зависимости от абсолютной и относительной высоты полёта

Оценка ограничения высоты полёта экраноплана при движении над водной поверхностью. При движении экраноплана над водой возможны тангажные колебания, что может привести к касанию воды на скоростях 500...600 км/ч. Для предотвращения этого необходимо ограничить высоту полёта до безопасной.

Предварительная оценка показывает (см. рис. 3), что при 4-5-балльном волнении изменение угла по тангажу может составить около $\Delta\alpha = 2...4^\circ$. Примерная длина концевых поплавков $L_{\text{кон}}$ экраноплана составляет 2...4 средней аэродинамической хорды крыла. Тогда запас безопасной высоты определим по формуле

$$h_{\text{без}} = \frac{L_{\text{кон}}}{2} * \sin(\Delta\alpha),$$

где $L_{\text{кон}}$ – длина между концевыми частями экраноплана; $\Delta\alpha$ – изменение угла по тангажу.

Минимальная абсолютная высота полёта

$$h_{\text{min}} = \frac{h_{\text{вол}}}{2} + h_{\text{без}}.$$

Высота волны принимается в соответствии с параметром Significance Wave Height (SWH) по 9-балльной шкале Всемирной Метеорологической организации.

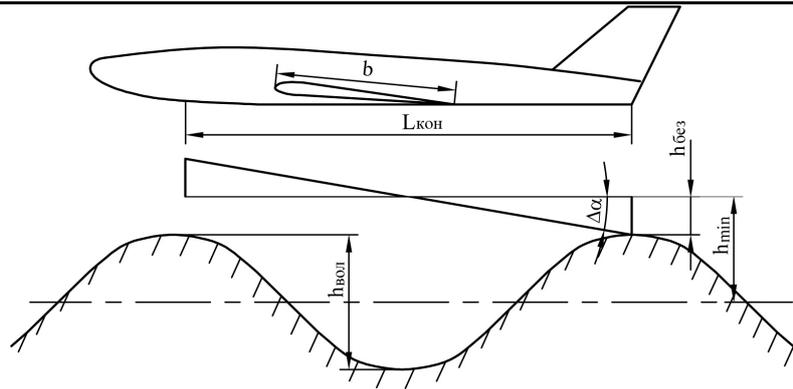


Рис. 3. Определение безопасной высоты полёта экраноплана:
 $h_{вол}$ – высота волны; $h_{без}$ – запас безопасной высоты полёта;
 h_{min} – абсолютная минимальная высота полёта

Определение зон эффективности экраноплана по сравнению с самолётом по критерию удельного километрового расхода. По результатам расчётов определены зоны выгодной транспортной эффективности, где экраноплан выигрывает по удельному километровому расходу топлива по сравнению с самолётом. Зоны выгодной транспортной эффективности показаны на рис. 4. В качестве ограничения примем три условия по удельному километровому расходу топлива экраноплана: равен самолётному (выигрыш 0 %), меньше самолётного на 30 % и на 50 %.

По приведённым ограничениям можно определить минимальную взлётную массу экраноплана, обеспечивающую заданный выигрыш по критерию транспортной эффективности при различных абсолютных высотах полёта.

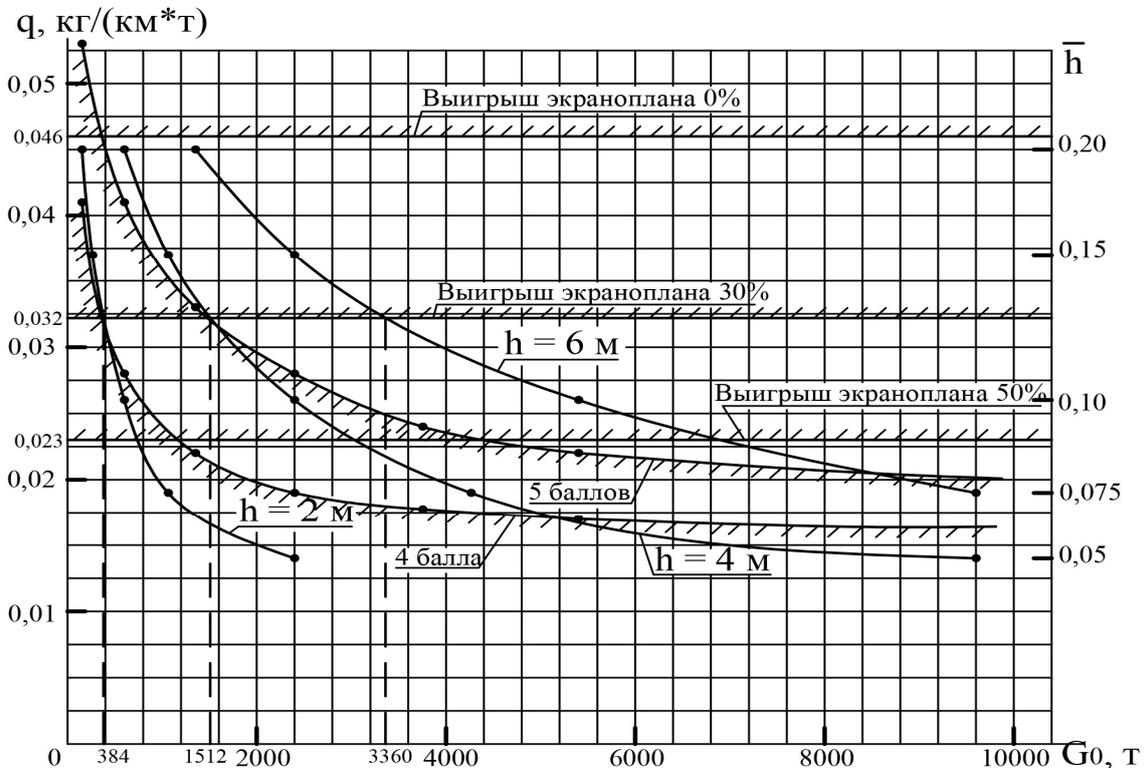


Рис. 4. Зоны выгодной транспортной эффективности экраноплана по сравнению с самолётом по критерию «удельный километровой расход топлива»

Ограничения снизу определяются минимально возможной высотой полёта экраноплана над водной поверхностью.

Изменения в необходимой минимальной взлётной массе экраноплана для достижения заданной транспортной эффективности по удельному километровому расходу топлива представлены в табл. 1.

Таблица 1

Минимальная взлётная масса экраноплана, обеспечивающая выгодную эксплуатацию по сравнению с самолётом

| Абсолютная высота полёта экраноплана, м | Выигрыш экраноплана по сравнению с самолётом, % | | |
|---|---|------|------|
| | 0 % | 30 % | 50 % |
| | Минимальная взлётная масса экраноплана, т | | |
| 2 | 150 | 384 | 736 |
| 4 | 580 | 1512 | 3032 |
| 6 | 1250 | 3360 | 6896 |

На рис. 5 показаны ограничения по массогабаритным параметрам экраноплана при 4- и 5-балльном волнении моря.

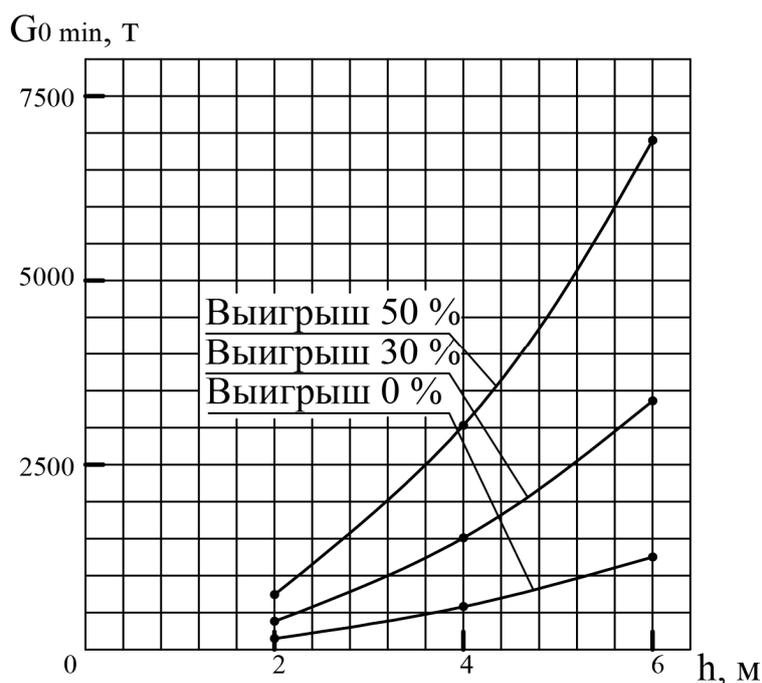


Рис. 5. Минимальная взлётная масса экраноплана при различном выигрыше по удельному километровому расходу топлива по сравнению с самолётом

Заключение. Анализ полученных результатов при исследовании сравнительной транспортной эффективности экраноплана и самолёта по критерию «удельный километровый расход топлива» по отношению к взлётной массе показал следующее:

1. **Аэродинамическое качество.** Экраноплан может превосходить самолёт по аэродинамическому качеству на определённых высотах полёта (относительные высоты $h^- = 0,05 \dots 0,15$). Минимальная относительная высота ограничена размерами экраноплана или возможностью контакта с экранирующей поверхностью, а максимальная – незначительным влиянием экрана на аэродинамическое качество.

2. **Массогабаритные ограничения.** Полёт на высоте более 4 м требует значительных размеров, недостижимых на текущем уровне технологий, для достижения 30 % выигрыша экраноплана в сравнении с самолётом по критерию топливной эффективности.

3. **Экономическая привлекательность.** Экономическая выгода экраноплана проявляется при 30%-м выигрыше в сравнении с самолётом по топливной эффективности, достигнутой при полёте на высоте 4 м. Это требует средней хорды крыла 31,7 м, размаха 95,1 м, площади крыла 3015 м² и взлётной массы 1512 т.

4. **Увеличение массы при большем выигрыше.** При 50%-м выигрыше на высоте 4 м взлётная масса возрастает до 3032 т, а хорда крыла – до 44,4 м.

5. **Воздействие морской среды.** Эксплуатация экраноплана в морских условиях требует противокоррозионной защиты, что увеличивает массу конструкции по сравнению с самолётом и снижает экономическую эффективность.

6. **Критерий удельного расхода топлива.** В исследовании использован критерий удельного километрового расхода топлива по отношению к взлётной массе. Однако более точным показателем является удельный расход относительно массы полезной нагрузки, что требует более глубокого анализа состава взлётной массы. Возможно, минимальная взлётная масса экраноплана вырастет на 15...20 % из-за эксплуатационных требований в условиях моря.

7. **Гидродинамические аспекты.** Фюзеляж экраноплана обычно ниже задней кромки крыла, что обеспечивает плавучесть без погружения крыла в воду. Это создаёт ограничения на минимальную высоту полёта, снижая аэродинамическое качество, увеличивая минимальную взлётную массу.

8. **Колебания в полёте.** Экраноплан испытывает колебания по тангажу и вертикали, что требует ограничения минимальной высоты полёта для предотвращения касания воды на крейсерской скорости, что также увеличивает минимальную массу.

Таким образом, экраноплан представляет собой интересный, но сложный объект для исследований, требующий дальнейшего изучения для оптимизации его эксплуатационных характеристик и экономической эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гадецкий, В. М. Аэродинамические характеристики крыльев малого удлинения ($\lambda = 0,5...3$) при наличии неподвижного экрана / В. М. Гадецкий, М. Н. Некрасова, С. И. Руденко; Серия: Труды ЦАГИ. – М.: Бюро науч. информации ЦАГИ, 1966. – 34 с.
2. Мусатов, Р. А. Особенности влияния удлинения прямоугольных крыльев на аэродинамические характеристики вблизи экрана / Р. А. Мусатов // Сборник докладов IV научной конференции по гидроавиации. Гидроавиасалон 2002. – М., Изд-во ЦАГИ, 2002. – С. 273-280.
3. Атлас аэродинамических характеристик тонких крыльев вблизи экрана при установившемся движении / С. Д. Ермоленко и др. – М.: Машиностроение, 1972. – 62 с.
4. Белавин, Н. И. Экранопланы / Н. И. Белавин. – Л.: Судостроение, 1977. – 232 с.
5. Торенбик, Э. Проектирование дозвуковых самолётов / Э. Торенбик; пер. с англ. Е. П. Голубков. – М.: Машиностроение, 1983. – 648 с.
6. Проектирование самолётов / С. М. Егер, В. Ф. Мишин, Н. К. Лисейцев и др.; под ред. С. М. Егера. – М.: Машиностроение, 1983. – 616 с.
7. Мхитарян, А. М. Аэродинамика / А. М. Мхитарян. – М.: Машиностроение, 1976. – 488 с.
8. Аэромеханика самолёта: динамика полёта: учеб. для авиационных вузов / А. Ф. Бочкарев, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов и др.; под ред. А. Ф. Бочкарева и В. В. Андреевского. – М.: Машиностроение, 1985. – 360 с.
9. Практическая аэродинамика самолётов Ту-204-120 и Ту-204-120С: учеб. пособие / В. Г. Ципенко, В. П. Бехтир, М. Г. Ефимова, Ю. Н. Стариков. – М.: МГТУ ГА, 2005. – 86 с.
10. Стариков, Ю. Н. Практическая аэродинамика самолёта Ту-204: учеб. пособие / Ю. Н. Стариков, В. П. Иванченко. – Ульяновск: УВАУ ГА, 1995. – 94 с.

Башков О. В., Люй Лань, Бао Фэнюань, Чжао Цзыдун, Башкова Т. И.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНДУКТИВНОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ ОКСИДНЫХ ПОКРЫТИЙ,
ФОРМИРУЕМЫХ НА АЛЮМИНИЕВОМ СПЛАВЕ МЕТОДОМ МИКРОДУГОВОГО ОКСИДИРОВАНИЯ

Башков О. В., Люй Лань, Бао Фэнюань, Чжао Цзыдун, Башкова Т. И.
O. V. Bashkov, Lyu Lan, Bao Fengyuan, Zhao Zidong, T. I. Bashkova

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНДУКТИВНОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ ОКСИДНЫХ
ПОКРЫТИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ НА АЛЮМИНИЕВОМ СПЛАВЕ МЕТОДОМ
МИКРОДУГОВОГО ОКСИДИРОВАНИЯ**

**MODELING THE INFLUENCE OF INDUCTION ON THE PARAMETERS OF OXIDE
COATINGS FORMED ON AN ALUMINUM ALLOY BY THE MICRO-ARC OXIDATION
METHOD**

Башков Олег Викторович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Материаловедение и технология новых материалов» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: bashkov_ov@mail.ru.

Oleg V. Bashkov – Doctor of Engineering, Professor, Head of Materials Science and Technology of New Materials Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk Region, Komsomolsk-on-Amur, 27, Lenin Ave. E-mail: bashkov_ov@mail.ru.

Люй Лань – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: lvlan1980@163.com.

Lyu Lan – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk Region, Komsomolsk-on-Amur, 27, Lenin Ave. E-mail: lvlan1980@163.com.

Бао Фэнюань – кандидат технических наук, доцент школы материаловедения и химической инженерии Харбинского университета науки и технологии (КНР, Харбин); 150080, КНР, провинция Хэйлунцзян, Харбин, Нанган, Сю Фу Лу, 52. E-mail: bao5413@qq.com.

Bao Fengyuan – PhD in Engineering, Associate Professor, Materials Science and Chemical Engineering School, Harbin University of Science and Technology (China, Harbin); China, Heilongjiang, Harbin, Nangang, Xue Fu Lu, 52. E-mail: bao5413@qq.com.

Чжао Цзыдун – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: 379917387@qq.com.

Zhao Zidong – Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk Region, Komsomolsk-on-Amur, 27, Lenin Ave. E-mail: 379917387@qq.com.

Башкова Татьяна Игоревна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Материаловедение и технология новых материалов» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре); 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. E-mail: telem01@mail.ru.

Tatiana I. Bashkova – PhD in Engineering, Associate Professor, Materials Science and Technology of New Materials Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur); 681013, Khabarovsk Region, Komsomolsk-on-Amur, 27, Lenin Ave. E-mail: telem01@mail.ru.

Аннотация. Работа посвящена исследованию характера формирования оксидных покрытий, формируемых на алюминиевом сплаве 7075 методом микродугового оксидирования (МДО), и анализу влияния индуктивности электрической цепи на параметры покрытий. Образцы из сплава 7075 подвергались МДО в течение периодов времени 60, 90 и 120 мин с установленной в электрическую цепь индуктивностью, варьируемой в диапазоне 0,5...53 мГн. В работе рассмотрено влияние формы и коэффициента заполнения импульсов электрического тока пробоя, формируемых управляемым генератором при МДО образцов. Исследования проведены в рамках полного факторного планирования эксперимента, выполнен анализ линейности модели полученных регрессионных уравнений. Установлена нелинейность влияния энергии импульсов электриче-



ского тока и индуктивности на толщину, шероховатость и микротвёрдость формируемых на алюминиевом сплаве оксидных покрытий.

Summary. The paper is devoted to the study of the nature of the formation of oxide coatings formed on aluminum alloy 7075 by the microarc oxidation (MAO) method, and the analysis of the effect of the electric circuit inductance on the coating parameters. Samples of alloy 7075 were subjected to MAO for periods of 60, 90 and 120 minutes with an inductance installed in the electric circuit, varying in the range of 0.5-53 mH. The paper considers the effect of the shape and duty cycle of the breakdown electric current pulses formed by a controlled generator during MAO of samples. The studies were carried out within the framework of full factorial design of the experiment; an analysis of the linearity of the model of the obtained regression equations was performed. The nonlinearity of the effect of the energy of electric current pulses and inductance on the thickness, roughness and microhardness of oxide coatings formed on the aluminum alloy was established.

Ключевые слова: микродуговое оксидирование, алюминиевый сплав 7075, индуктивность, полное факторное планирование, оксидный слой, импульс тока, толщина, шероховатость, микротвёрдость.

Key words: micro arc oxidation, aluminum alloy 7075, inductance, full factor planning, oxide layer, current pulse, thickness, roughness, microhardness.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 24-29-00838).

УДК 620.179.16

Введение. Наряду с анодированием, используемым в качестве электрохимического метода создания защитных оксидных покрытий, микродуговое оксидирование (МДО) в последние годы достаточно широко применяется для оксидирования алюминиевых, титановых, магниевых сплавов [1–3]. Широкое распространение этот метод нашёл не только в промышленности [4], но и в медицине [5]. Метод основан на формировании электрического и теплового пробоя оксидной плёнки при импульсной анодной или анодно-катодной поляризации в растворах солей или щелочей и их комбинаций. Электрохимическое воздействие осуществляется в слабоконцентрированных электролитах, в отличие от традиционного низковольтного анодирования. С увеличением толщины оксидного слоя напряжение пробоя растёт, что приводит к формированию на поверхности плёнки множества микродуговых разрядов. Эти разряды создают каналы различного диаметра, по которым электролит проникает к поверхности металла. Созданная в цепи электрическая проводимость приводит к образованию пористой структуры, обеспечивая постепенное наращивание оксидного слоя при последовательном действии импульсов. Оксидирование алюминиевых сплавов выполняется в основном с целью повышения твёрдости и износостойкости поверхности. Выбор оптимальных параметров процесса (состав электролита и электрические параметры) основывается на данных об электрохимическом поведении и окислении обрабатываемых сплавов [6–9]. Исследования, проведённые с использованием электролитов на основе гидроксида калия и силиката натрия, позволили установить взаимосвязь между параметрами процесса микродугового оксидирования, выполняемого на деформируемых алюминиевых сплавах, и характеристиками получаемых покрытий [10; 11]. В одном из исследований [12] добавление в силикатно-щелочной электролит гексаметафосфата натрия позволило стабилизировать процесс оксидирования при обработке Al-Cu-Mg сплавов. Влияние реактивного сопротивления, вносимого в цепь посредством индуктивности, на морфологию и качество оксидных покрытий, образуемых на титановом сплаве в потенциодинамическом режиме, описано в работе [13]. В работе [14] представлены результаты исследования параметров импульсов для анодно-катодного МДО, направленного на получение высокопрочных оксидных слоёв на алюминиевом сплаве AL-53.

Данная работа посвящена изучению влияния индуктивности в электрохимической цепи на структуру и параметры оксидных покрытий, формируемых на алюминиевом сплаве 7075 методом микродугового оксидирования.

Материалы и методы. В исследовании применяли электролит, представляющий собой водный раствор силиката натрия 6 г/л с добавлением небольшого количества гидроксида калия и гексаметафосфата натрия для повышения стабильности процесса. Выбор данного состава электролита обусловлен результатами предыдущих работ, показавшими корреляцию между режимами МДО и свойствами образующихся оксидных плёнок на алюминиевых сплавах. На основе ранее проведённых исследований был разработан способ получения покрытий с заданными параметрами [15]. Разработанный метод основан на управлении периодом обработки и амплитудой импульсного напряжения для получения покрытий заданной толщины и шероховатости. В предложенном способе оксидирования [16] используется регистрация акустической эмиссии (АЭ) на протяжении всего процесса МДО для получения большей информации о происходящих при МДО процессах и более точного определения толщины и шероховатости формируемых на алюминиевых сплавах покрытий.

МДО выполняли на экспериментальной установке МДО-50 (производства ДВФУ совместно с Институтом химии ДВО РАН), представляющей собой генератор с частотой следования импульсов 300 Гц напряжением до 600 В с максимальным током 50 А. Импульсы формируются тиристорным управляемым генератором с аналого-цифровым управлением. Установка позволяет выполнять дискретное изменение индуктивности, включаемой последовательно с образцом с помощью механического переключателя. Введение индуктивности обеспечивало переход от режима постоянного напряжения к импульсному гальванодинамическому режиму. Известно, что величина коэффициента заполнения импульса влияет на длительность существования микродуги и характеристики покрытия [6; 7]. Оксидирование проводили на прямоугольных образцах (20x30x2 мм) из алюминиевого сплава 7075.

На основе предположения о линейной зависимости толщины и шероховатости покрытия от периода обработки при постоянной плотности тока [10] было выполнено факторное планирование эксперимента с двумя входными параметрами: индуктивность $L(x_1)$, период оксидирования $t(x_2)$. Матрица полного факторного эксперимента приведена в табл. 1.

Таблица 1

Матрица планирования полного факторного эксперимента для двух факторов

| № опыта | $L(x_1)$ | $t(x_2)$ | Толщина, мкм (y_1) | Шероховатость Ra, мкм (y_2) | Микротвёрдость HV0,01 (y_3) |
|---------|----------|----------|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | - | - | y_{11} | y_{21} | y_{31} |
| 2 | - | + | y_{12} | y_{22} | y_{32} |
| 3 | + | - | y_{13} | y_{23} | y_{33} |
| 4 | + | + | y_{14} | y_{24} | y_{34} |

Границы изменения значений для факторов эксперимента были определены предварительными исследованиями: $L = 0,52...53,1$ мГн, $t = 60...120$ мин. Искомыми параметрами эксперимента являлись толщина покрытия, шероховатость (Ra) и микротвёрдость (HV0,01) поверхностного слоя.

Для поддержания постоянной температуры (27...30 °С) электролит циркулировал через охлаждаемый змеевик. Образцы перед обработкой подвергались механической шлифовке и полировке до шероховатости $Ra \leq 0,05$ для исключения влияния начальной шероховатости.

Шероховатость поверхности измерялась портативным профилометром TR-200, толщина и морфология покрытия оценивались с помощью электронного микроскопа Hitachi S3400N, микротвёрдость определялась на полированном поперечном срезе с использованием микротвёрдомера НМV-2.

Результаты и их обсуждение. Согласно матрице планирования был проведён эксперимент по оксидированию 4 образцов, результаты которого приведены в табл. 2.

Таблица 2

Исходные факторы и результаты двухфакторного эксперимента

| № опыта | Факторы эксперимента | | Экспериментальные результаты | | |
|---------|----------------------------------|---|------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| | Индуктивность L (x_1), мГн | Период оксидирования t (x_2), мин | Толщина b , мкм (y_1) | Шероховатость R_a , мкм (y_2) | Микротвёрдость $HV_{0,01}$ (y_3) |
| 1 | 0,52 | 60 | 20 | 1,453 | 735 |
| 2 | 0,52 | 120 | 11 | 0,661 | 651 |
| 3 | 53,1 | 60 | 18 | 1,599 | 1187 |
| 4 | 53,1 | 120 | 13 | 0,715 | 685 |

На основе полученных данных были построены регрессионные модели, описывающие зависимость трёх характеристик оксидного слоя: толщины (δ), шероховатости (R_a) и микротвёрдости ($HV_{0,01}$) – от индуктивности и периода оксидирования:

$$b = 12,284 - 0,0666 \cdot L + 0,1417 \cdot t; \quad (1)$$

$$R_a = 0,8122 - 8,5 \cdot 10^{-4} \cdot L + 0,0123 \cdot t; \quad (2)$$

$$HV_{0,01} = 132,3 + 5,639 \cdot L + 11,29 \cdot t. \quad (3)$$

Графическое представление экспериментальных и расчётных значений приведено на рис. 1. Коэффициент детерминации (R^2) для всех трёх моделей превышает 0,8, а p -значение для F -критерия меньше 0,05, что свидетельствует о статистической значимости полученных регрессионных уравнений.

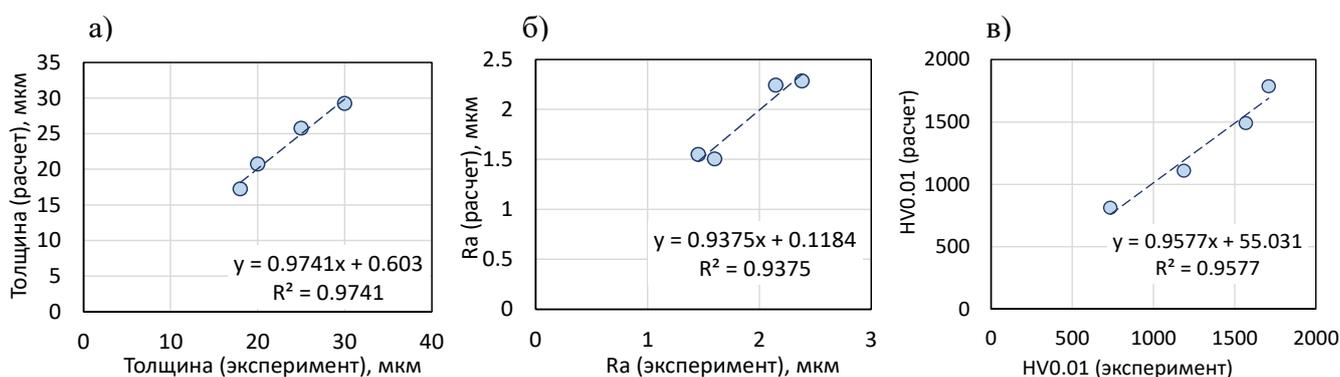


Рис. 1. Зависимости между экспериментальными и расчётными значениями параметров МДО покрытий сплава 7075:

а – толщины δ ; б – шероховатости R_a ; в – микротвёрдости $HV_{0,01}$

Анализ микроструктуры показал, что при минимальной индуктивности ($L = 0,52$ мГн) формируются покрытия с более крупными порами при сопоставимой толщине (для одинакового периода обработки). Микротвёрдость покрытий, полученных при $L = 0,52$ мГн, ниже, чем при максимальной индуктивности ($L = 53,1$ мГн). Для более глубокого изучения влияния индуктивности был проведён расширенный эксперимент при плотности тока $15,66$ А/дм² с дополнительными значениями индуктивности (4,8, 17,6 и 28,8 мГн) и временем обработки 60, 90 и 120 мин. Это позволило

проанализировать влияние формы импульса тока на характеристики покрытий. Результаты расширенного эксперимента, включая данные регрессионного анализа (уравнения (1)–(3)), представлены на рис. 2 в виде зависимостей толщины, шероховатости и микротвёрдости, полученных в эксперименте, от расчётных значений, полученных при решении регрессионных уравнений.

Отклонение экспериментальных данных от линейной модели наблюдается при значениях индуктивности 17,6 и 28 мГн (см. рис. 2). Исследование микроструктуры покрытий, сформированных за 120 мин при различных значениях индуктивности, показало неоднородность толщины (25...38 мкм). Однако при $L = 17,6$ мГн часто встречаются участки с высокой сплошностью (см. рис. 3, в) и микротвёрдостью свыше 2000 HV0,01.

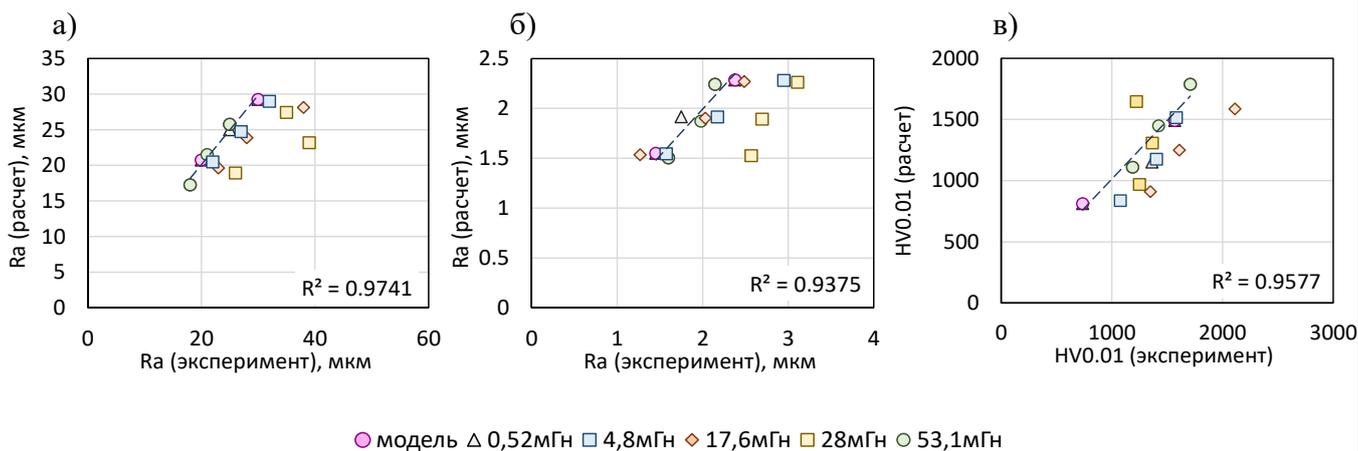


Рис. 2. Зависимости между экспериментальными и расчётными значениями при МДО сплава 7075 в расширенном эксперименте:
а – толщины δ ; б – шероховатости Ra; в – микротвёрдости HV0,01

Покрyтия, полученные при $L = 4,8$ мГн, характеризуются скоплением мелких пор и трещин (см. рис. 3, б), а при $L = 28$ мГн – наличием тонких сквозных каналов и сеткой пор в приграничной с подложкой зоне (см. рис. 3, в). Эти данные подтверждают нелинейный характер влияния индуктивности на процесс МДО. Увеличение индуктивности от 0,52 до 28 мГн приводило к монотонному росту толщины покрытия (см. рис. 2, а). Максимальная микротвёрдость достигалась при $L = 17,6$ мГн для всех исследованных времён обработки (см. рис. 2, в). При максимальной индуктивности ($L = 53,1$ мГн) наблюдалось снижение толщины покрытия без существенного изменения шероховатости и микротвёрдости.

Нелинейная зависимость свойств покрытий от индуктивности объясняется изменением энергетических параметров импульсов. Рост оксидного слоя происходит в результате теплового пробоя, следующего за электрическим пробоем с частичным плавлением и окислением прилегающего металла. Для пробоя растущего оксидного слоя требуется всё большее напряжение. Постоянство средней плотности тока ($i = 15,66$ А/дм²) поддерживается изменением коэффициента заполнения импульса. Введение индуктивности приводит к увеличению коэффициента заполнения, сглаживанию импульса тока и снижению его амплитуды. Система управления установкой МДО поддерживает постоянное среднее значение тока, однако энергетические характеристики импульса определяются коэффициентом заполнения и действующим значением плотности тока, снижающимся с повышением значения индуктивности, в отличие от среднего значения тока. Взаимобразная зависимость между коэффициентом заполнения импульса и действующим значением тока может оказаться одной из причин нелинейности зависимости энергии пробоя от индуктивности цепи.

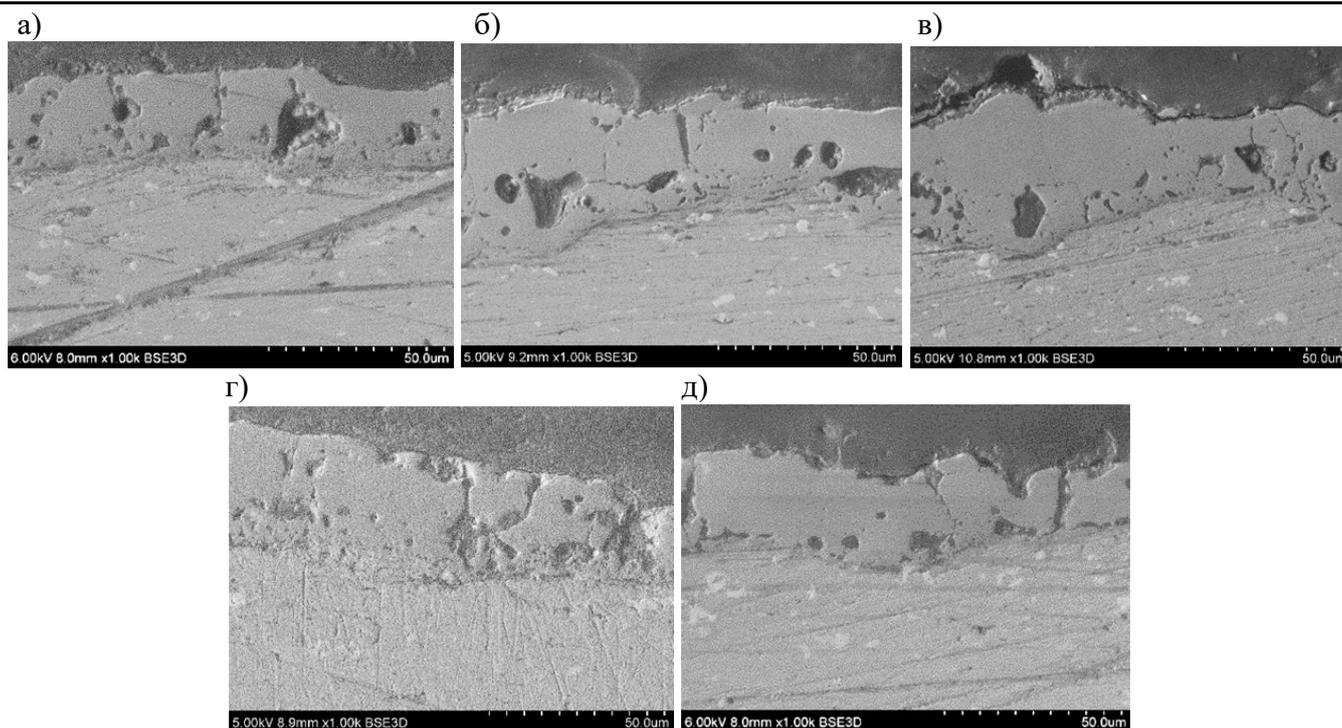


Рис. 3. Структуры оксидных покрытий, сформированных в течение 120 мин при индуктивности L : а – 0,5 мГн; б – 4,8 мГн; в – 17,6 мГн; г – 28 мГн; д – 53,1 мГн

Выводы. В результате проведённого экспериментального исследования микродугового оксидирования алюминиевого сплава 7075 в электролите на основе гидроксида калия, силиката натрия и гексаметафосфата натрия с варьированием индуктивности в цепи и периода обработки были получены следующие результаты.

Экспериментально подтверждена нелинейная зависимость между индуктивностью в цепи и ключевыми характеристиками оксидных покрытий (толщина, шероховатость, микротвёрдость) для широкого диапазона периодов оксидирования от 60 до 120 мин. В частности, повышение индуктивности до 28 мГн при обработке продолжительностью 60 и 90 мин приводит к увеличению толщины покрытия. Дальнейшее увеличение индуктивности вызывает снижение толщины. Максимальное значение микротвёрдости наблюдается при индуктивности 17,6 мГн для всех временных интервалов оксидирования. Значение шероховатости снижается при индуктивности 17,6 и 53,1 мГн.

Нелинейное изменение свойств оксидных покрытий, по всей видимости, обусловлено нелинейным влиянием индуктивности на параметры импульсов тока (форма, амплитуда, энергия) и определяет преобладающие факторы процесса МДО – рост или растворение оксидного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордиенко, П. С. Микродуговое оксидирование металлов и сплавов / П. С. Гордиенко, В. А. Достовалов, А. В. Ефименко. – Владивосток: Издательский дом Дальневосточного федерального университета, 2013. – 521 с.
2. Плазменно-электролитическое модифицирование поверхности металлов и сплавов. В 2 т. / И. Суминов [и др.]; под общ. ред. И. Суминова; «МАТИ» – Российский гос. технологический ун-т им. К. Э. Циолковского. – М.: Техносфера, 2011. – Т. 1-2.
3. Plasma electrolysis for surface engineering / A. L. Yerokhin, X. Nie, A. Leyland [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 1999. – Vol. 122, No. 2-3. – P. 73-93.
4. Krishtal, M. M. Oxide layer formation by micro-arc oxidation on structurally modified Al-Si alloys and applications for large-sized articles manufacturing / M. M. Krishtal // Advanced Materials Research. – 2009. – Vol. 59. – P. 204-208.

5. Влияние параметров процесса микродугового оксидирования на формирование и свойства биопокрытий на основе волластонита и фосфатов кальция / М. Б. Седельникова, Ю. П. Шаркеев, Е. Г. Комарова, Т. В. Толкачева // Физика и химия обработки материалов. – 2016. – № 6. – С. 57-63.
6. Влияние скважности на катодные релаксационные процессы и электрохимические свойства формируемых покрытий на титане / П. С. Гордиенко, О. С. Василенко, У. В. Харченко [и др.] // Перспективные материалы. – 2013. – № 11. – С. 59-64.
7. Рыбалко, А. В. Некоторые особенности процесса микродугового оксидирования при высоких плотностях тока / А. В. Рыбалко, О. О. Сахин, А. А. Месяц // Металлообработка. – 2010. – № 2 (56). – С. 30-38.
8. Сарилов, М. Ю. К вопросу исследования пробоя при электроэрозионной обработке алюминиевых и титановых сплавов / М. Ю. Сарилов, Д. А. Палкин, М. В. Минаков // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2020. – № I-1 (41). – С. 83-92.
9. Сарилов, М. Ю. Исследование процессов в межэлектродном промежутке при электроэрозионной обработке алюминиевых и титановых сплавов / М. Ю. Сарилов, У. Е. Решетник // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2019. – № III-1 (39). – С. 101-108.
10. Исследование влияния режимов микродугового оксидирования на морфологию и параметры оксидного покрытия, наносимого на алюминиевый сплав Д16АТ / Ф. Бао, О. В. Башков, Д. Чжан [и др.] // Frontier Materials & Technologies. – 2023. – № 1. – С. 7-21.
11. Бао, Ф. Усталостное разрушение алюминиевого сплава 1163 с различной морфологией оксидного покрытия / Ф. Бао, Л. Люй, О. В. Башков // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2024. – Т. 20. – № 1 (229). – С. 3-7.
12. Malyshev, V. N. Features of microarc oxidation coatings formation technology in slurry electrolytes / V. N. Malyshev, K. M. Zorin // Applied Surface Science. – 2007. – Vol. 254, No. 5. – P. 1511-1516.
13. Микродуговое оксидирование при импульсной поляризации в гальванодинамическом режиме / П. С. Гордиенко, В. А. Достовалов, И. Г. Жевтун [и др.] // Электронная обработка материалов. – 2013. – Т. 49. – № 4. – С. 35-42.
14. Рыбалко, А. В. Некоторые особенности процесса микродугового оксидирования при высоких плотностях тока / А. В. Рыбалко, О. О. Сахин, А. А. Месяц // Металлообработка. – 2010. – № 2 (56). – С. 30-38.
15. Патент № 2794643 С1 Российская Федерация, МПК С25D 11/00, G01R 27/14. Способ мониторинга и управления процессом микродугового оксидирования: № 2022124254: заявлено 12.09.2022: опубликовано 24.04.2023 / Башков О. В., Бао Фэнюань, Башкова Т. И.; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет». – 11 с.
16. Патент № 2807242 С1 Российская Федерация, МПК С25D 11/00. Способ мониторинга и управления процессом микродугового оксидирования с использованием метода акустической эмиссии: заявлено 21.02.2023: опубликовано 13.11.2023 / О. В. Башков, Бао Фэнюань, Т. И. Башкова [и др.]; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Комсомольский-на-Амуре государственный университет». – 10 с.

УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ КНАГТУ:
НАУКИ О ПРИРОДЕ И ТЕХНИКЕ 2024

АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

Бобков А. В., Миташова Т. А.

ОЦЕНКА НАПРАВЛЕНИЙ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ МАЛОРАЗМЕРНЫХ
БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ САМОЛЁТНОГО ТИПА

ЭНЕРГЕТИКА

Знаенок В. Н., Мельниченко О. В., Портной А. Ю.

РАЗРАБОТКА СПОСОБА ПОДВОДА ТОКА К ПЛЕЧУ ВЫПРЯМИТЕЛЬНО-ИНВЕРТОРНОГО
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭЛЕКТРОВОЗА НА БАЗЕ IGBT-ТРАНЗИСТОРОВ

Фролов А. В., Боцманов А. В.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РАБОТЫ МОСТОВОГО ВЫПРЯМИТЕЛЯ
С АКТИВНО-ЁМКОСТНОЙ НАГРУЗКОЙ

Старинский Н. И., Гуляев А. В., Фокин Д. С.

РАЗРАБОТКА РЕГУЛЯТОРА ПО ПОИСКУ ОПТИМАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ
ДЛЯ СИСТЕМЫ АСИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ – АВТОНОМНЫЙ ИНВЕРТОР НАПРЯЖЕНИЯ

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

Черный С. П., Савельев Д. О., Сбитнев Н. Р., Саяпина П. О.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ,
ТРЕБУЮЩИМИ УЧЁТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Черный С. П., Муравьев Е. М., Иванов Д. Р.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЧЁТКОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ГОРОДСКОГО ТРАФИКА

Носков С. И., Чекалова А. Р.

МИНИМИЗАЦИЯ РАССТОЯНИЯ МОДУЛЕЙ ОШИБОК
АППРОКСИМАЦИИ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ДО ИХ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Григорьев Я. Ю., Альхименко И. Н.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ
МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

Андрианов И. К., Чепурнова Е. К.

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О СУММАРНЫХ ИЗДЕРЖКАХ ПРОИЗВОДСТВА
И ХРАНЕНИЯ ПРОДУКЦИИ С ПОДВИЖНОЙ ПРАВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Трещев И. А., Монастырская Е. И.

СОБЫТИЙНАЯ ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ЗЛОУМЫШЛЕННИКА

Дружинин В. А., Азимов Х. Х., Андрианов И. К., Колесник М. Б., Иванов С. Н.

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЕЗКОПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Дмитриев Э. А., Карпенко В. А., Одинокоев В. И., Евстигнеев А. И.

ЭВОЛЮЦИЯ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПРОЦЕССОВ ПОДАЧИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В КРИСТАЛЛИЗАТОР И ЕГО ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

Дзюба В. А., Арсентьева К. А., Журавлева Е. В.

ПАРАМЕТРЫ ДИАГРАММ «МОМЕНТ-КРИВИЗНА» ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ С АРМАТУРОЙ А500 НА СТАДИИ БЛИЗКОЙ К РАЗРУШЕНИЮ



Маслов В. И., Куделько А. Р.

РАЗРАБОТКА НАПРАВЛЕНИЙ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ИННОВАЦИОННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ
ОБЕСПЕЧЕНИЮ СОЦИАЛЬНОЙ СФЕРЫ ХАБАРОВСКОГО КРАЯ

Ворощенко В. Д., Горькавый М. А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ
В РОБОТИЗИРОВАННОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

Бутко В. П., Кузьмин Р. В.

ГЕНЕРАТОР МИКРОГЭС, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ СИСТЕМУ АВТОБАЛЛАСТНОЙ
НАГРУЗКИ В КАЧЕСТВЕ ОСНОВНОГО СПОСОБА СТАБИЛИЗАЦИИ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Петрова А. Н., Фролов Д. О.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ,
ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ РЕЛЕВАНТНЫЙ ПОИСК В СИСТЕМАХ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Петрова А. Н., Фролов Д. О.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОИСКА ФОНОВЫХ ССЫЛОК ПО СМЫСЛУ
В СИСТЕМАХ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Андрианов И. К., Палков К. А., Чепурнова Е. К.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТУРБИННОЙ ЛОПАТКИ С ДЕФЕКТОМ

Просолович А. А.

ПРИМЕНЕНИЕ WEBGL ПРИ РАЗРАБОТКЕ ГИС КАМПУСА УНИВЕРСИТЕТА

Петрова А. Н., Фролов Д. О.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ДЛЯ РАНЖИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ
В СИСТЕМАХ БОЛЬШИХ ДАННЫХ

Петрова А. Н., Фролов Д. О.

РАЗРАБОТКА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ СКВОЗНОГО ОБУЧЕНИЯ
МОДЕЛЕЙ ПОИСКА ИНФОРМАЦИИ

Фролов А. В., Савин А. Е., Нестерова Н. С., Жданова С. М.

УПРАВЛЕНИЕ ДРАЙВЕРОМ ШАГОВОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ
С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВОГО ДЕЛИТЕЛЯ ЧАСТОТЫ С ПЕРЕМЕННЫМ
ДРОБНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДЕЛЕНИЯ

Гумунюк П. В.

СРАВНЕНИЕ ЗАТРАТ ВРЕМЕНИ НА РАЗРАБОТКУ ПРОГРАММНОГО
ПРОДУКТА РУЧНЫМ СПОСОБОМ И СРЕДСТВАМИ
АВТОМАТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Базилевский М. П.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДЕКСА ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ
ЦЕН ПО ДАННЫМ СУБЪЕКТОВ СИБИРСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЬНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ефремов М. А., Ткачук А. А., Монастырский Д. Я., Ким К. К., Иванов С. Н.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРИВОДА
БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Космынин А. В., Щетинин В. С., Марьин С. Б.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ШПИНДЕЛЬНОГО УЗЛА
НА ГАЗОМАГНИТНЫХ ОПОРАХ ЗА СЧЁТ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ
МАГНИТНОЙ СИЛОЙ



Саяпина П. О., Крупский Р. Ф., Черный С. П., Савельев Д. О.

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО УСКОРИТЕЛЯ

Сухоруков С. И., Годяев А. И., Овсянников А. Р.

РАЗРАБОТКА СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТИЗИРОВАННОГО
КОМПЛЕКСА ТРЁХМЕРНОЙ ПЕЧАТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ

УПРАВЛЕНИЕ

Грачев М. И.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ОРГАНИЗАЦИИ И ЕЁ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОСНАЩЕНИЕ

Горькавый М. А., Мельниченко М. А., Соловьев В. А., Горькавый А. И.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДАХ КОЛЛАБОРАТИВНОГО РОБОТА

Купова А. В., Купов А. В., Соловьев В. А.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЧЁТКОГО РЕГУЛЯТОРА КОМПЕНСИРУЮЩЕГО
УСТРОЙСТВА НА ЯЗЫКЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БЛОКОВ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

Лосев А. С.

КОНТЕКСТНЫЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

Буров А. Е., Москвичев Е. В.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ОТВЕРСТИЯ
НА ПРОЧНОСТЬ ТКАНОГО УГЛЕПЛАСТИКА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Варыгина М. П., Буров А. Е.

ВЛИЯНИЕ ТОПОЛОГИИ ПОРИСТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР
НА СВОЙСТВА ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И КРУЧЕНИИ

Водинчар Г. М.

РАСЧЁТ И ПРИМЕНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ СОБСТВЕННЫХ МОД
СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОДИНАМО

Одинокое В. И., Евстигнеев А. И., Дмитриев Э. А., Колошенко Ю. Б., Чернышова Д. В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕГОСЯ В ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЕ МЕТАЛЛА,
ИМЕЮЩЕГО ДЕФЕКТЫ В ВИДЕ ПУСТОТ

Тимофеев Г. А., Бердоносое В. Д.

ОПТИЧЕСКОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ СИМВОЛОВ В ИЗОЛИРОВАННОЙ
ГИБРИДНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ: МЕТОДЫ АВТОМАТИЗАЦИИ
СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Цициашвили Г. Ш., Гаврилов А. Н.

ЗОНИРОВАНИЕ РАЙОНОВ РЕГИОНА ПО БЛИЗОСТИ К ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЕ

Сенашов С. И., Савостьянова И. Л., Пашковская О. В.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА



Иванов Д. Х.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО МНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ
УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Алексеев Г. В., Спивак Ю. Э.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ
ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л., Попова Е. О.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗОГРЕВ ЗА СЧЁТ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО
ТРЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ЕЁ ДВИЖЕНИИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

Трухин В. О., Анисич А. И., Лобанова Э. А., Нефедев К. В.

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА
МОДЕЛИ ИЗИНГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

Мурашкин Е. В.

УСЛОВИЯ АТЕРМИЧНОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН
ДЛЯ ПОЛУИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Фролов Д. О., Петрова А. Н.

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К АРХИТЕКТУРЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ
ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ РЕЛЕВАНТНОСТИ ПОИСКА В БОЛЬШИХ ОБЪЁМАХ ДАННЫХ

Чехонин К. А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛАЗЕРНЫХ АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

Ткаченко П. Г., Котляров В. П.

АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКРАНОПЛАНА
И САМОЛЁТА КАК ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Башков О. В., Люй Лань, Бао Фэньюань, Чжао Цзыдун, Башкова Т. И.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНДУКТИВНОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ
ОКСИДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ НА АЛЮМИНИЕВОМ СПЛАВЕ
МЕТОДОМ МИКРОДУГОВОГО ОКСИДИРОВАНИЯ

Гренкин Г. В., Карпов В. В.

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД УПРОЩЁННОЙ INDOOR-НАВИГАЦИИ

Краснов И. М., Григорьева А. Л.

К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ЧАСТИЧНО-ПОРИСТОГО КОНУСНОГО ГАЗОСТАТИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА

Щетинин В. С., Космынин А. А., Марьин С. Б.

МЕТОДИКА РАСЧЁТА ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ШПИНДЕЛЬНОГО УЗЛА НА БЕСКОНТАКТНЫХ ОПОРАХ С ВНЕШНИМ НАДДУВОМ ГАЗА

Иванов С. Н., Колесник М. Б., Ким К. К., Азимов Х. Х., Андрианов И. К.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ГЕРМЕТИЧНОЙ
ЗАДВИЖКИ МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА

Носков С. И., Овсянников И. В.

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ РИСКА
С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Петрова А. Н., Фролов Д. О.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОИСКА В НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЯХ С ПОМОЩЬЮ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Плетнев Н. О., Полейчук П. А.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗОНЫ ТЕРМИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЯ
НА ДЕФОРМАЦИЮ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ ЛАЗЕРНОЙ СВАРКЕ

Загнетов В. А., Бахматов П. В.

ПРЕДОТВРАЩЕНИЕ КАВИТАЦИОННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ ОБОРУДОВАНИЯ
НЕФТЕПЕРЕРАБОТКИ. МЕТОДЫ, ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, КОНСТРУКЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Короткий М. М., Бахматов П. В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СВАРНОГО
СОЕДИНЕНИЯ КОЛЛЕКТОРА РЕАКТОРНОЙ ПЕЧИ РИФОРМИНГА
УСТАНОВКИ ПРОИЗВОДСТВА ВОДОРОДА ИЗ СПЛАВА MANAURITE 900

Кабалдин Ю. Г., Саблин П. А.

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ ОБРАБАТЫВАЕМОГО МАТЕРИАЛА НА ФОРМИРОВАНИЕ
ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ И КАЧЕСТВО ОБРАБОТАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ РЕЗАНИИ

Лиманкин В. В., Старцев Е. А., Бельский В. В.

НАПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕРАБОТКИ ТЕХНОГЕННЫХ ОТХОДОВ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫХ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Стельмаков В. А., Федорченко С. К.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫКРАШИВАНИЯ АБРАЗИВНЫХ ЗЁРЕН
ШЛИФОВАЛЬНЫХ КРУГОВ ПРИ БЕСЦЕНТРОВОМ ШЛИФОВАНИИ

Ким Е. Д., Дзюба Г. С., Щекин А. В., Дорофеев С. В., Войнов А. Р.

ВЛИЯНИЕ АЛЮМИНИЯ НА СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЕ, ЛИКВАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
И СВОЙСТВА ВЫСОКОЭНТРОПИЙНОГО СПЛАВА СИСТЕМЫ $Al_x-Ti-Cr-Ni-V-Zr$,
ПОЛУЧЕННЫЕ СВС-МЕТАЛЛУРГИЕЙ

Стробыкин Н. А., Бахматов П. В.

УСЛОВИЯ СОЗДАНИЯ БЕЗДЕФЕКТНЫХ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ТОНКОСТЕННЫХ
ТИТАНОВЫХ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лихтин В. В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СВОЙСТВ ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУР
ОТ СООТНОШЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ИХ КОМПОНЕНТ

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Кольхалов Г. А., Кравченко Е. Г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ
В ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ $100 < Re < 3 \cdot 10^6$

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

О НАГРАЖДЕНИИ ГОСУДАРСТВЕННОЙ НАГРАДОЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ А. А. БУРЕНИНА
К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ОДИНОКОВА ВАЛЕРИЯ ИВАНОВИЧА

Content

COMPUTER SCIENCE AND INFORMATICS

A. S. Losev

CONTEXTUAL APPROACH TO ANALYSIS
OF NETWORK STRUCTURES 5

A. E. Burov, E. V. Moskvichev

EXPERIMENTAL STUDY ON EFFECT OF HOLE ON STRENGTH
OF PLAIN WEAVE COMPOSITE UNDER TENSION 12

M. P. Varygina, A. E. Burov

INFLUENCE OF POROUS PERIODIC STRUCTURES TOPOLOGY
ON BEHAVIOR OF TUBULAR ELEMENTS UNDER TENSION AND TORSION 18

G. M. Vodinchar

CALCULATION AND APPLICATION OF APPROXIMATIONS FREE
OSCILLATIONS EIGENMODES OF A ROTATING SPHERICAL SHELL
OF A VISCOUSE FLUID FOR SIMULATION IN GEODYNAMO 25

V. I. Odinokov, A. I. Evstigneev, E. A. Dmitriev, Yu. B. Koloshenko, D. V. Chernyshova

MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF METAL CRYSTALLIZING
IN SHELL FORM, HAVING DEFECTS IN THE FORM OF VOIDS 31

G. A. Timofeev, V. D. Berdonosov

OPTICAL SIMPLE DISCOVERING IN AN ISOLATED HYBRID
ENERGY SYSTEM: METHODS OF AUTOMATIZATION
OF DATA COLLECTION AND PROCESSING 41

G. Sh. Tsitsiashvili, A. N. Gavrilov

ZONING OF THE REGION DISTRICTS BY PROXIMITY
TO THE EXTERNAL BORDER 46

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova, O. V. Pashkovskaya

CONSERVATION LAWS IN THE MECHANICS
OF A DEFORMABLE SOLID 50

D. Kh. Ivanov

NUMERICAL IDENTIFICATION OF A NONSTATIONARY MULTIPLIER
IN THE RIGHT-HAND SIDE OF ANOMALOUS DIFFUSION EQUATION 58

G. V. Alekseev, Yu. E. Spivak

CONTROL PROBLEMS FOR A MAGNETOHYDRODYNAMICS
STATIONARY MODEL OF A VISCOUS HEAT-CONDUCTING FLUID 65

L. V. Kovtanyuk, G. L. Panchenko, E. O. Popova

DEFORMATION AND HEATING DUE TO SURFACE FRICTION
OF THE PLUG MATERIAL IN A ROUND PIPE AS IT MOVES UNDER
THE ACTION OF A CHANGING PRESSURE DIFFERENCE 68

V. O. Ttukhin, A. I. Anisich, E. A. Lobanova, K. V. Nefedev

REALIZATION OF NON-CLASSICAL ALGORITHM OF FULL
BRUTE-FORCE SEARCH OF ISING MODEL USING CUDA TECHNOLOGY 77

E. V. Murashkin

ATHERMALITY CONDITIONS OF LONGITUDINAL WAVES
FOR SEMI-ISOTROPIC THERMOELASTIC MICROPOLAR MEDIA 82

D. O. Frolov, A. N. Petrova

MODERN APPROACHES TO NEURAL NETWORK ARCHITECTURE
TO INCREASE THE RELEVANCE OF SEARCH IN LARGE DATA VOLUME 87

K. A. Chekhonin

MODELING OF RESIDUAL STRESSES IN LASER
ADDITIVE TECHNOLOGIES 92

P. G. Tkachenko, V. P. Kotlyarov

ANALYSIS OF THE COMPARATIVE CHARACTERISTICS
OF AN EKRAANOPLAN AND AN AIRPLANE AS A MEANS
OF TRANSPORTATION 100

O. V. Bashkov, Lyu Lan, Bao Fengyuan, Zhao Zidong, T. I. Bashkova

MODELING THE INFLUENCE OF INDUCTION ON THE PARAMETERS
OF OXIDE COATINGS FORMED ON AN ALUMINUM
ALLOY BY THE MICRO-ARC OXIDATION METHOD 107

SCIENTIFIC NOTES OF KNASTU:

NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY 2024 114

Научное издание

Учёные записки КНАГТУ
2024 № VII (79)
Науки о природе
и технике

Выпускающий редактор
Е. П. Иванкова

Подписано в печать 19.12.2024
Дата выхода в свет 20.12.2024

Формат А4.
Бумага офисная 80 г/м².
Усл. печ. л. 13,63.
Уч.-изд. л. 17,18.
Тираж 200. Заказ 31218

Отпечатано в типографии
КНАГУ
681013,
г. Комсомольск-на-Амуре,
пр. Ленина, д. 27.

